А. С. Обрубов
Ф. А. Пчелинцев
Т. С. Струков
П. В. Чулков

Турниры Архимеда

А. С. Обрубов, Ф. А. Пчелинцев,
Т. С. Струков, П. В. Чулков

Турниры Архимеда

Электронное издание

Москва
Издательство МЦНМО
2018

УДК 51(07)
ББК 22.1я721
Т88

А. С. Обрубов, Ф. А. Пчелинцев, Т. С. Струков, П. В. Чулков
Турниры Архимеда
Под общ. ред. П. В. Чулкова.
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2018
364 с.
ISBN 978-5-4439-3255-2

В сборнике представлены тематические подборки задач зимнего и заочного Турниров Архимеда (за 1992—2015 годы). К задачам приведены подробные решения и комментарии.

Приведены сведения о прошедших турнирах, методические материалы по организации математических соревнований школьников.

Для школьников, родителей, учителей и всех, кто интересуется математикой.

В оформлении книги использованы рисунки Ю. Р. Гурова.

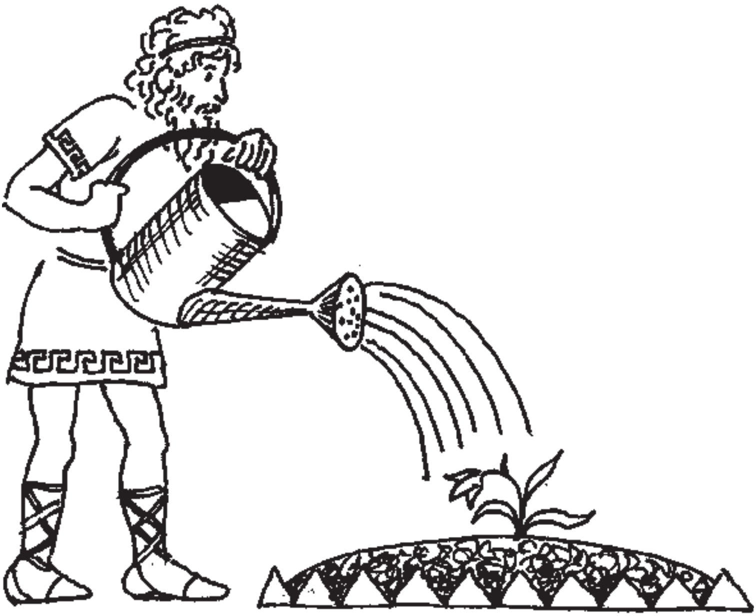
Подготовлено на основе книги:
Турниры Архимеда / А. С. Обрубов, Ф. А. Пчелинцев,
Т. С. Струков, П. В. Чулков. Под общ. ред. П. В. Чулкова. —
М.: МЦНМО, 2018. — ISBN 978-5-4439-1255-4.

12+

Учебно-методическое издание

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499) 241–08–04.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-3255-2



Предисловие

Предисловие

В сборнике рассказано о Турнирах Архимеда — математической олимпиаде, вот уже более четверти века организуемой учителями Москвы для учащихся 6–7 классов.

Турнир включён в календарь олимпиад (*olimpiada.ru/activity/45*) и проводится в середине января.

Турнир «открыт» для школьников и учителей: в соревнованиях может принять участие любой школьник шестого или седьмого класса, зарегистрировавшийся на сайте Турниров Архимеда (*www.arhimedes.org*), а любой учитель (при желании) может принять участие в работе оргкомитета и жюри.

Важная особенность турнира — подведение итогов и награждение проводятся в день проведения олимпиады.

Из истории турнира

Впервые турнир с таким названием был проведён в январе 1992 года по инициативе учителей средней школы № 5 ЮЗАО В. Н. Лебедева и П. В. Чулкова. Инициатива была поддержана руководством Московского авиационно-технологического института им. К. Э. Циолковского (МАТИ).

Оргкомитет и жюри тогда составили директор школы Т. Е. Маркелова, учителя: А. И. Щербакова, В. И. Тураева, Л. М. Жукова, Н. А. Юрченко, А. Л. Фукс, О. А. Капаева, А. Ф. Кушнарёв, учащиеся старших классов — Фёдор Пчелинцев, Роман Лепешков, Дмитрий Нистратов, Татьяна Куликова и Ольга

Кузьмина (участие в работе жюри и оргкомитета старшеклассников стало одной из традиций турнира).

Ю.В. Селиванов

Работой жюри (как и многие годы в дальнейшем) руководил доцент МАТИ Ю. В. Селиванов (ныне доктор физико-математических наук, профессор).

В турнире тогда приняли участие 378 школьников — цифра неожиданно большая для обычной «районной» школы, и было решено сделать турнир традиционным.

В настоящее время в системе Турниров Архимеда десятки соревнований школьников по математике, информатике, экономике, в которых ежегодно принимают участие более 4000 школьников из Москвы и других регионов России (см. Приложение 1).

О структуре книги

В сборнике впервые собраны все задачи зимнего и большинство задач заочного Турнира Архимеда 1992–2016 годов, а также задачи школьных турниров, проводившихся в Центре образования № 109 в 1996–2003 годах. Кроме того, включены задачи из весеннего Турнира Архимеда и других источников, содержащие аналогичные идеи.

В первой главе «Числа и вычисления» представлены задачи на перестановки натуральных чисел, расстановки арифметических знаков и скобок, криптарифмы, делимость и остатки, действия с дробями.

Во вторую главу «Арифметика и немного алгебры» включены традиционные арифметические задачи на движение и совместную работу, доли, проценты и смеси, календарные и другие задачи.

В третьей главе «Логические сюжеты» — задачи на ситуативную логику, задачи про рыцарей и лжецов, смешанные задачи на логику и арифметику.

В четвертой главе «Алгоритмы и дискретные процессы» — задачи на выявление закономерностей, инварианты, построение алгоритмов, взвешивания и переливания, управление ресурсами, математические игры.

В пятой главе «Геометрические мотивы» — задачи на разрезания на клетчатой доске, расположение точек на прямой, плоскости и в пространстве, расстановки шахматных фигур, геометрические задачи комбинаторного характера и другие.

В шестой главе — задачи на разные темы, которые объединяет наличие в решении громоздких и кропотливых рассуждений. Такие задачи предлагались, как правило, на заочном Турнире Архимеда.

Кроме задач (и решений к ним) в Приложениях представлены исторические и статистические сведения о прошедших турнирах, образцы протоколов, карточек участников и инструкции для дежурных, описаны технологии проведения и подготовки зимнего и заочного Турниров Архимеда.

Благодарности

Все эти годы турнир проводился силами многих энтузиастов: учителей школ, преподавателей и студентов вузов, старшеклассников.

Размер книги не позволяет сказать обо всех.

Перечислим лишь тех, чей вклад в организацию был особенно велик.

А.В. Бунчук

В составе оргкомитета турнира работали в основном представители базовых школ (все в Юго-Западном округе Москвы): школ № 5 (1992–1995) — директор Т. Е. Маркелова, № 109 (1996–2002) — директор Е. А. Ямбург и, начиная с 2003 года, Физматшколы № 2007 — директор А. В. Бунчук, а также учителя школ — точек проведения олимпиады: № 2009 и № 1354 ЮЗАО (директора Д. М. Гесслер и А. Л. Постникова), № 1568 СВАО (директор В. П. Кулешов), № 1557 ЗелАО (директор Т. Н. Грабарник), № 6 г. Мытищи (директор Л. А. Ляпина), № 12 г. Химки (директор Л. В. Нестеренко), Кировского физико-математического лицея (директор М. В. Юсупов).

А.Д. Блинков

Кроме Ю. В. Селиванова работой жюри в разные годы руководили А. Д. Блинков (учитель математики школы № 218) и А. В. Смирнов (директор АНО «Институт логики»).

Много лет в составе жюри работали: Я. И. Абрамсон, Б. Д. Аминев, Г. А. Анчихрова, В. Д. Арнольд, Т. А. Баранова, Ю. А. Блинков, В. В. Будич, В. В. Вакулюк, А. А. Волкова, Т. П. Волкова, А. С. Воротнюк, А. С. Вшивцев, А. С. Горская, А. З. Гурвиц, В. М. Гуровиц, О. Е. Данчен-


А.В. Смирнов

ко, Е. А. Емельянова, Т. В. Житникова, А. А. Заславский, Т. П. Зорина, П. М. Камаев, П. П. Камаев, Е. Е. Кармакова, А. Г. Кисунько, К. П. Коротков, Г. И. Липкин, Э. Х. Липкина, Т. В. Михрина, А. Е. Новодворский, Е. А. Новодворская, Н. М. Нетрусова, Д. В. Прокопенко, И. А. Николаева, А. Ф. Пенкин, А. В. Подобедов, Г. Е. Полянская, М. Г. Потапова, Ф. А. Пчелинцев, Ю. О. Пукас, М. А. Резникова, В. В. Трушков, А. В. Семенов, Т. В. Халкечева, Т. Н. Харютина, В. В. Ховрина, Л. Е. Федулкин, Е. М. Федулкина, А. В. Шевкин, Е. Ф. Шершнев, И. А. Эльман и многие другие.

Большинство задач, предлагавшихся школьникам, — переделки известных задач, взятых из математического фольклора, но некоторые придуманы специально для Турниров Архимеда.

В разные годы предлагали свои задачи и участвовали в обсуждении вариантов: Т. Ш. Абакиров, А. Д. Блинков, Ю. А. Блинков, О. Е. Данченко, Е. А. Емельянова, А. К. Ковальджи, А. А. Марачев, Д. Н. Нистратов, Е. А. Новодворская, Ф. А. Пчелинцев, А. С. Обрубов, А. И. Саблин, А. В. Спивак, Т. С. Струков, Б. Р. Френкин, Л. Е. Федулкин, Е. А. Шапарин, А. В. Шаповалов, А. В. Шевкин.

Мы благодарны руководителям Юго-Западного окружного управления образования (особенно М. Ю. Тихонову и М. И. Случу), поддерживавшим нас с первых, самых трудных лет, и методистам ОМЦ ЮЗОУО Е. В. Юрченко, Л. И. Сударевой, Л. Б. Слуцкому, работавшим в жюри.

Информационную поддержку турнира много лет обеспечивала газета «Математика» (главные редакторы — Ю. Л. Соловейчик, В. Т. Лисичкин и Л. О. Рослова).

В основу сборника положены материалы, опубликованные редакцией «Архимед» (издание АНО «Институт логики»), газетами «Математика» и «Новости образования», размещённые на сайта Турниров Архимеда, а также личные архивы составителей.

Обложки всех сборников «Архимед», посвящённых турниру, украшают рисунки Ю. Р. Гурова, многие из которых воспроизведены в данной книге.

Составители выражают глубокую благодарность Б. Д. Аминеву, внесшему много ценных замечаний при подготовке книги.

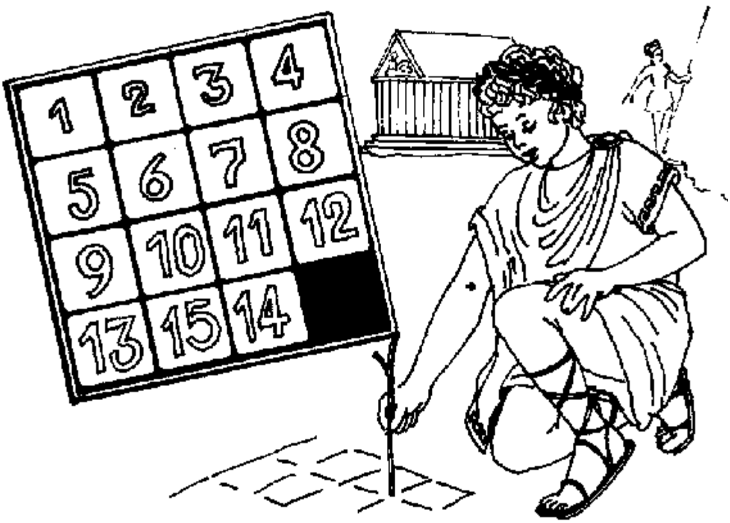
Книга посвящена памяти первого директора ГБОУ Физматшколы № 2007 Алексея Васильевича Бунчука, без которого нам трудно представить становление школы № 2007, и памяти Виктора Васильевича Шмаля — замечательного учителя физики, чей вклад в организацию первых турниров (да и во всю работу школы № 5) был очень велик.

В.В. Шмаль

Многие годы Турниры Архимеда проходят при поддержке Московского центра непрерывного математического образования (директор И. В. Ященко), издание этого сборника осуществлено также по инициативе МЦНМО.

П. В. Чулков

Глава I



Числа и вычисления

ГЛАВА I
ЧИСЛА И ВЫЧИСЛЕНИЯ

Цифры на карточках

1. Цифры на карточках. На восьми карточках записаны цифры, знаки «плюс» и «равно».

$\boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{5}\ \boxed{6}\ \boxed{7}\ \boxed{8}\ \boxed{+}\ \boxed{=}$

Составьте верный пример на сложение, используя все указанные карточки.

2. Интересное число. У Феди есть 8 карточек с написанными на них цифрами.

$\boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{4}$

Он хочет составить из них такое число, чтобы в его десятичной записи между двумя единицами была одна цифра, между двойками — две цифры, между тройками — три, а между четвёрками — четыре. Существует ли такое число?

3. Новогодний аттракцион. Приз получит тот, кто обрежет нити так, что на новогодней гирлянде (см. рис. 1) останется по одной цифре от 1 до 9. Как этого добиться, сделав наименьшее количество разрезов?

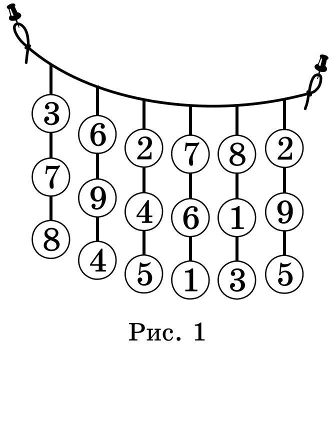


Рис. 1

4. Хоровод цифр. Можно ли расставить на окружности цифры 0, 1, 2,…, 9 так, чтобы сумма любых трёх из них, идущих подряд, не превышала: а) 13; б) 15?

Цифры вместо букв

5. Ребус. Подберите вместо букв цифры так, чтобы равенство стало верным (вместо одинаковых букв — одинаковые цифры, а вместо разных букв — разные). *Все решения находить не требуется.*

$$22 + \text{ТУРН} + \text{ИР} = 2013.$$

6. Восстановите пример, учитывая, что одинаковые цифры обозначены одинаковыми буквами.

$$\text{СОН} \times \text{НОС} = 692443.$$

7. Верно ли неравенство? Вася утверждает, что неравенство

$$\text{ДВА} \times \text{ШЕСТЬ} < \text{ДВАДЦАТЬ}$$

верно для любых значений букв. Прав ли он? Известно, что разные буквы обозначают разные цифры, а одинаковые буквы — одинаковые цифры.

8. Восстановите пример:

$$\text{АГАГА} + \text{УГУГУ} = \text{УГУГУГ}.$$

Одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры.

9. Ребус. Вася составляет ребус. Чтобы закончить работу, он хочет подобрать такие значения букв, чтобы число $\overline{\text{ПАНОРАМА}}$ разделилось нацело на число $\overline{\text{ПАНАМА}}$. Удастся ли ему это сделать? (В ребусе одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры.)

10. Две суммы. Известно, что сумма

$$\overline{\text{ТУРНИР}} + \overline{\text{АРХИМЕДА}}$$

кратна 2016. Докажите, что сумма $\overline{\text{ИР}} + \overline{\text{АР}}$ кратна 9 (одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры).

Расстановки чисел и скобок

11. Расставьте плюсы. Требуется поставить несколько плюсов между цифрами числа 987654321 так, чтобы в сумме получилось 99. Сколько решений имеет задача?

12. Особенный день. Петя заметил, что дата проведения Турнира Архимеда, записанная восемью цифрами (22.01.2012), обладает интересной особенностью: переставив первые четыре цифры, можно получить номер года. А какие ещё даты в 2012 году имеют такое же свойство?

13. Используя цифру 4 четыре раза, скобки и знаки действий, представьте все числа от 0 до 5.

14. Расставьте скобки:

а) в равенстве $2 : 3 : 4 : 5 : 6 = 5$ так, чтобы оно стало верным;

б) в выражении $2 : 2 - 3 : 3 - 4 : 4 - 5 : 5$ так, чтобы в результате выполнения указанных действий получилось число, большее 50.

15. Числовая спираль. На клетчатой бумаге ставятся натуральные числа по спирали, часть которой изображена на рис. 2. На каких горизонтальной и вертикальной полосах стоит число 830, если считать, что число 1 стоит на пересечении первой горизонтальной и первой вертикальной полос?

…	…	…	…	…
…	7	8	9	10
…	6	1	2	…
…	5	4	3	…
…	…	…	…	…

Рис. 2

16. Спорщики. На длинной ленте выписаны в ряд натуральные числа от 1 до 10000:

$$1234567891011121314\ldots$$

Вася и Петя идут вдоль ленты. Они поспорили, какое сочетание цифр появится раньше: 2009 или 2010. Помогите им разрешить спор.

17. Диспетчер записывает время отправления рейсовых автобусов (например, 05:50, то есть 5 часов 50 минут). Однажды он заметил, что для записи времени отправления двух автобусов потребовалось 8 различных цифр. Мог ли интервал между этими автобусами быть меньше 40 минут?

18. Представьте в виде суммы двух слагаемых число 987654321 так, чтобы каждое из них состояло из тех же девяти цифр, но записанных в другом порядке.

19. Некоторое девятизначное число, составленное из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (каждая цифра вошла в десятичную запись числа ровно один раз), умножили на 8. В результате получилось число, десятичная запись которого состоит из тех же цифр, но записанных в другом порядке. Найдите хотя бы одно такое число.

20. Сколько квадратов? Можно ли зачеркнуть несколько цифр в числе 412384026, чтобы в результате получился квадрат натурального числа? Если да, то найдите все решения.

21. Пример на умножение. На доске было написано равенство. Дежурный по классу успел стереть некоторые цифры (сколько цифр он стёр, неизвестно), на доске осталось:

$$1127\ldots173 \cdot 1017\ldots565 = 1126\ldots745\,.$$

Могло ли исходное равенство быть верным?

22. Семиклассник Вася Иванов переставил цифры в некотором числе, после чего полученное число сложил с исходным. В ответе у него получилось число 99...99. Учитель математики Иван Васильевич сказал, что ответ неверен. Вася очень обиделся на своего учителя — ведь Иван Васильевич не видел Васиного решения! Кто прав: Вася или его учитель, если в записи суммы 999 девяток?

Действия с натуральными числами

23. Сумма уменьшаемого, вычитаемого и разности равна 2000. Найдите уменьшаемое.

24. Перемножили квадрат и куб некоторого натурального числа, большего единицы. Могла ли при этом получиться шестая степень некоторого натурального числа?

25. Можно ли подобрать 4 числа так, чтобы все их попарные суммы составляли 6 последовательных целых чисел?

26. Продолжение предыдущей задачи. Можно ли подобрать 5 чисел так, чтобы их попарные суммы составляли 10 последовательных целых чисел?

27. Тринадцать гирь. Имеется 13 гирь, каждая из которых весит целое число граммов. Известно, что любые 12 из них можно разложить на чашках весов так, что наступит равновесие. Верно ли, что все гири имеют один и тот же вес?

28. В центре внимания — куб. Может ли сумма 999 последовательных натуральных чисел быть кубом натурального числа?

29. Десять цифр. Можно ли, используя каждую из десяти цифр по одному разу, записать:

а) какое-нибудь натуральное число и его квадрат;

б) квадрат и куб одного и того же натурального числа?

Квадраты магические и не очень

Магический квадрат — это квадрат, в котором суммы чисел во всех строках, столбцах и больших диагоналях равны.

30. В клетках магического квадрата 3×3 некоторые числа стёрли (см. рис. 3). Восстановите квадрат.

	15	9
		24

Рис. 3

31. В клетках магического квадрата 4×4 расставлены числа 1, 2, 3, ..., 16, причём числа 1 и 16 стоят соответственно в левой нижней и правой верхней угловых клетках квадрата. Предположим, что сумма чисел, стоящих в правой нижней и левой верхней угловых клетках, равна a. Какие значения может принимать a?

32. Квадрат, но не магический. Можно ли расставить все числа от 1 до 16 в клетках квадрата 4×4 так, чтобы суммы по строкам и по столбцам были равны 8 последовательным натуральным числам?

33. «Полумагический» квадрат. Можно ли таблицу 5×5 заполнить числами 0^2, 1^2, 2^2, ..., 24^2 так, чтобы сумма чисел во всех вертикалях и горизонталях была одинаковой? Ответ объясните.

Числа в таблице

34. Можно ли числа 1, 2, 3, ..., 11, 12 расставить в таблице из 3 строк и 4 столбцов так, чтобы сумма чисел: а) в каждом из столбцов; б) в каждой из строк была одна и та же?

35. Числа в таблице. Верно ли утверждение: «Если в клетках таблицы 6×6 записать числа 1, 2, ..., 36, то обязательно найдётся квадрат 2×2, сумма чисел в котором является чётным числом»?

36. Продолжение предыдущей задачи. Верно ли утверждение: «В клетках таблицы 6×6 можно записать числа 1, 2, ..., 36 таким образом, что найдётся ровно один квадрат 2×2, сумма чисел в котором является чётным числом»?

37. Что больше? В прямоугольной таблице 20×10 (20 строк, 10 столбцов) записаны числа. В каждой строке выбрано наименьшее число, затем среди этих (наименьших в строке) чисел выбрано наибольшее. В каждом столбце выбрано наибольшее число, затем среди этих (наибольших в столбце) чисел выбрано наименьшее. Получилось два различных числа. Какое из этих чисел больше?

38. Числа в таблице. В таблицу записаны числа от 0 до 99 (см. рис. 4).

0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
9	19	29	39	49	59	69	79	89	99

Рис. 4

Коля поставил перед некоторыми из них знак минус, но так, что в каждой строке и каждом столбце минус поставлен ровно у половины чисел. Затем он подсчитал сумму всех чисел в таблице. Какие числа у него могли получиться?

Расстановки на кубе

39. В вершинах куба (см. рис. 5) расставлены числа от 1 до 8. На каждой грани записана сумма чисел, расположенных в её вершинах. Может ли оказаться так, что: а) на гранях записано шесть последовательных натуральных чисел; б) суммы чисел, стоящих в каждой грани, равны?

40. Куб. Можно ли вычеркнуть одно из натуральных чисел от 1 до 9, а оставшиеся числа расставить в вершинах куба (см. рис. 5) так, чтобы суммы чисел на каждой грани куба были одинаковы, но не были кратны вычеркнутому числу?

41. На рёбрах куба. а) Можно ли вычеркнуть одно из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, а оставшиеся числа расставить на рёбрах куба (см. рис. 6) так, чтобы сумма чисел на трёх рёбрах, примыкающих к каждой вершине куба, была одной и той же?

б) Может ли вычеркнутым числом быть число 13?

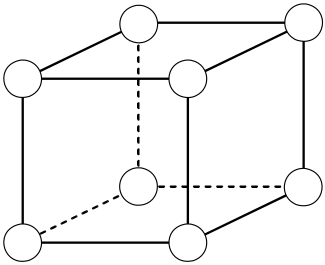


Рис. 5

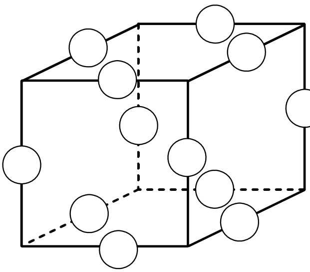


Рис. 6

Сумма цифр числа

42. Найдите число, сумма цифр которого равна разности между 328 и самим числом.

43. Равны или не равны? Вася задумал число и прибавил к нему сумму его цифр. Петя также задумал число и тоже прибавил к нему сумму его цифр. Суммы получились одинаковыми. Верно ли, что они задумали одинаковые числа?

44. Число и его квадрат. Существует ли такое натуральное число, что сумма его цифр больше суммы цифр его квадрата?

45. Найдите наименьшее четырёхзначное число, у которого сумма цифр больше, чем у любого меньшего числа.

46. Число и его сумма цифр. Какое наибольшее значение может принимать отношение трёхзначного числа к сумме его цифр?

47. Два числа. Существуют ли два таких натуральных числа a и b, что сумма цифр числа a равна 2008, сумма цифр числа b равна 2009, а сумма цифр числа $a+b$ равна 2010?

48. Ещё два числа. Существуют ли два таких натуральных числа a и b, что сумма цифр числа a равна 2009, сумма цифр числа b равна 2010, а сумма цифр числа $a+b$ равна 2011?

49. Сумма цифр некоторого натурального числа a равна b, сумма цифр числа b равна c. Известно, что сумма чисел a, b и c равна 60. Чему равно число a? Найдите все решения.

50. От одного до миллиона. Какова сумма всех цифр, используемых для записи всех натуральных чисел от одного до миллиона включительно?

Среднее арифметическое

51. Среднее арифметическое шести чисел равно 345, а среднее арифметическое четырёх других чисел равно 555. Чему равно среднее арифметическое всех десяти чисел?

52. Бывает ли такое? Может ли среднее арифметическое 35 целых чисел равняться 6,35?

53. Средний вес восьми мешков с картошкой равен 195 кг. Какое наибольшее количество мешков может весить меньше чем 191 кг?

54. Строка и её части. Петя написал на доске строку из 20 чисел. Коля подсчитал, что среднее арифметическое любых трёх соседних чисел равно 60. Верно ли, что среднее арифметическое всех чисел равно 60?

55. Вася и Петя задумали по 5 натуральных чисел, причём все 10 задуманных чисел оказались различными. Среднее арифметическое чисел Васиного набора равно наибольшему числу Петиного набора. Может ли среднее арифметическое чисел Петиного набора быть равно:

а) наименьшему числу Васиного набора;

б) наибольшему числу Васиного набора?

Чётные и нечётные числа

56. Набор карточек. У Васи есть набор из 10 карточек с цифрами от 0 до 9. Он хочет выложить карточки в ячейки равенства (см. рис. 7) так, чтобы чётность цифр в ячейках разных цветов была различна. Какие пять карточек он может выбрать? Укажите все варианты.

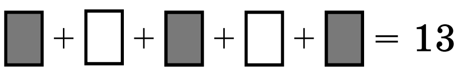


Рис. 7

57. Газетная «утка». В газете «КМ» было напечатано, что в школе № 2007 обучается 3688 учащихся, причём девочек на 303 больше, чем мальчиков. Отличник Вася Иванов сразу сказал, что в заметке допущена ошибка. Как он рассуждал?

58. Нечётные числа. Вася сложил 5 различных нечётных натуральных чисел, бо́льших 1, и получил в сумме 37. Какие это могли быть числа?

59. Целые числа. Числа a и b целые. Известно, что $a+b=100$. Может ли сумма $7a+3b$ равняться 627?

60. Можно ли карточки с написанными на них натуральными числами 1, 2, ..., 25 разложить в конверты так, чтобы в каждом конверте наибольшее число было равно сумме всех остальных чисел?

61. Звёздочка. Можно ли расставить в кружки на рис. 8 десять различных натуральных чисел так, чтобы суммы четырёх чисел вдоль каждой из пяти прямых были нечётными?

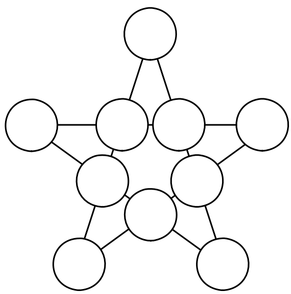


Рис. 8

62. Равные кучки. В наборе из гирь массой 1, 2, ..., 23 кг потеряли гирю в 21 кг. Можно ли оставшиеся гири разложить на две равные по массе кучки?

63. Пример на деление. Можно ли придумать пример на деление с остатком, чтобы делимое, делитель, частное и остаток (в произвольном порядке) оканчивались на 9, 7, 3 и 1?

64. Верно или неверно? На доске написано равенство:

$$1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 = 20.$$

Вместо звёздочек в неизвестном порядке написаны знаки «плюс» и «минус». Может ли это равенство быть верным?

Делимость и остатки

65. Удивительное число. Вася разделил некоторое нечётное число на 2007 и в остатке получил 99. Какой остаток получится, если разделить Васино число на 18?

66. Делимость на 1993. Верно ли, что сумма $1+2+\ldots+1993$ кратна 1993?

67. Числа и стрелки. В кружочках написали числа 1, 2, 3, 4, 6, 12 и от каждого числа к каждому его делителю направили стрелку. Затем числа и часть стрелок стёрли (см. рис. 9). Восстановите числа в кружках и добавьте недостающие стрелки.

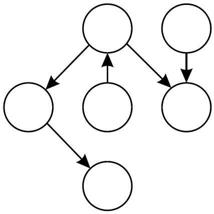


Рис. 9

68. Наименьший общий не делитель. Найдите наименьшее составное число, которое не делится ни на одно из натуральных чисел от 2 до 10.

69. Задача на делимость. Сколько существует натуральных чисел x, которые делятся на все натуральные числа, не превосходящие 10% от x?

70. Произведение цифр. Существует ли число, произведение цифр которого кратно 2005?

71. Принцип Дирихле. Может ли число 1999^n-1 оканчиваться на 1999 нулей?

72. Двойки и нули. Число $22\ldots22$, десятичная запись которого состоит из одних двоек, делится на 2002. При каком наименьшем количестве двоек это возможно? Сколько таких чисел существует?

73. Делимость на 11. Докажите, что если выражение $3a+4b+5c$ делится на 11 при некоторых целых значениях a, b и c, то и выражение $9a+b+4c$ при этих же значениях a, b и c делится на 11.

74. Делимость на 116. Натуральные числа a и b таковы, что $19a=97b$. Докажите, что число $a+b$ делится на 116.

75. Проверьте равенство:

$$3^{100}+7^{100}=8^{100}.$$

76. Найдите частное. В десятичной записи числа 11...11 — одни единицы. Вася сумел разделить его нацело на 999. Какое наименьшее частное могло получиться?

77. В олимпиаде по вышиванию для учащихся 6–7 классов участвуют команды школ — по 10 человек в каждой. В команде одной из школ некоторые учащиеся (возможно — все) заболели и не пришли. Сколько было заболевших, если мальчиков участвовало в олимпиаде в четыре раза меньше, чем девочек, а учащихся 6 классов — на 17 меньше, чем учащихся 7 классов?

78. Том Сойер и Гек Финн красили забор (см. рис. 10).

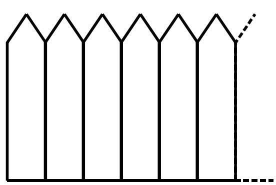


Рис. 10

Первым за кисть взялся Том: он прошёл вдоль забора и покрасил каждую пятую по счёту дощечку. Затем за дело взялся Гек и покрасил каждую четвёртую по счёту дощечку из неокрашенных. Затем красил Том — каждую третью по счёту дощечку из неокрашенных. И наконец Гек покрасил оставшиеся 7 дощечек. Сколько всего дощечек было в заборе?

Обыкновенные дроби

79. Из спичек сложено неверное равенство (см. рис. 11). Переложите одну спичку так, чтобы равенство стало верным.

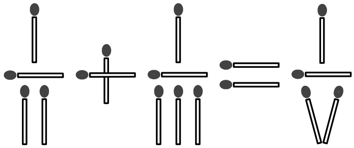


Рис. 11

80. Проверьте неравенство:

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{100}>1.$$

81. В отаре 8 овец. Первая овца съедает копну сена за 1 день, вторая за 2 дня, ..., восьмая за 8 дней. Кто быстрее съест копну сена: первая и вторая овцы или все остальные овцы вместе?

82. Сумма дробей. Можно ли представить 1 в виде суммы квадратов 2007 попарно различных правильных дробей?

Делимость и дроби

83. Стираем дроби. На доске написано равенство:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}=0.$$

Можно ли:

а) стереть некоторые дроби (и плюсы перед ними), а затем некоторые из оставшихся плюсов поменять на минусы так, чтобы равенство стало верным;

б) не стирая дробей, поменять некоторые плюсы на минусы так, чтобы равенство стало верным?

84. Два рыбака поймали 70 рыб, причём $\frac{5}{9}$ улова первого рыбака составляли караси, а $\frac{7}{17}$ улова второго — окуни. Сколько рыб поймал каждый?

Сумма цифр и делимость

85. Каких чисел больше? У каждого из чисел от 1 до 199920002001 вычислили сумму цифр. У получившихся чисел снова вычислили сумму цифр. И так далее, до тех пор пока не получились однозначные числа. Каких чисел в итоге получилось больше: 1 или 9?

86. Число на доске. На доске написано число

$$19921993\ldots20012002.$$

Разобьём произвольным образом его десятичную запись на два числа и сложим их. С полученным числом проделаем аналогичную операцию и так далее, до тех пор пока не получится однозначное число. Какое число может получиться?

87. Незнайка переставил цифры в некотором числе A и получил число B. Затем он вычислил разность $A - B$ и получил число, записанное с помощью одних единиц (другие цифры не использовались). Какое наименьшее число могло у него получиться?

88. Не производя вычислений. В равенстве

$$109^{10} = 23673{*}{*}67459211723401$$

замените звёздочки цифрами так, чтобы оно стало верным.

89. Счастливые пары. Сколько существует пар последовательных натуральных чисел, сумма цифр каждого из которых кратна 7?

90. Загадочное число. Известно, что x — наименьшее натуральное число, кратное 225, сумма цифр которого равна 225. Сколько цифр содержится в десятичной записи числа x?

91. Можно ли выписать числа 1, 2, 3, ..., 9 по кругу так, чтобы сумма никаких двух соседних чисел не делилась ни на 3, ни на 5, ни на 7?

92. Числа по кругу. Можно ли расставить числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 по кругу так, чтобы сумма любых трёх чисел, стоящих подряд, была кратна 3 и: а) была больше 9; б) была больше 12?

Факториал — это не страшно

93. Робот Вася умеет делить на 7. Если ему попадается какое-нибудь натуральное число, кратное 7, он делит его на 7, затем, если опять получилось число, кратное 7, он делит на 7 частное и так далее, до тех пор пока это возможно. Сколько раз он сможет разделить на 7 число 100! (читается — *сто факториал* — произведение всех натуральных чисел от 1 до 100)?

94. Чёт или нечет? Вычислили произведение всех натуральных чисел от 1 до 100, а затем в нём вычеркнули все нули. Какой будет последняя цифра получившегося числа — чётной или нечётной?

95. Тринадцатая цифра. Перемножили все натуральные числа от 1 до 50. Найдите тринадцатую цифру полученного произведения (справа!).

96. Вася называет 2011 год «удачным», так как существует такое натуральное число n, что произведение $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ оканчивается ровно на 2011 нулей. Проверьте, не ошибся ли Вася в подсчётах.

97. Карточки на столе. На столе выложены в ряд в некотором порядке карточки с цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Какова вероятность того, что полученное девятизначное число кратно 11?

Ответы, комментарии, решения

1. Приведём несколько вариантов расстановок.

$$\boxed{2}\boxed{7}\boxed{+}\boxed{3}\boxed{8}\boxed{=}\boxed{6}\boxed{5}, \quad \boxed{3}\boxed{7}\boxed{+}\boxed{2}\boxed{8}\boxed{=}\boxed{6}\boxed{5},$$

$$\boxed{2}\boxed{6}\boxed{+}\boxed{5}\boxed{7}\boxed{=}\boxed{8}\boxed{3}, \quad \boxed{5}\boxed{6}\boxed{+}\boxed{2}\boxed{7}\boxed{=}\boxed{8}\boxed{3}.$$

2. Ответ: да. Примеры:

$$\boxed{4}\boxed{1}\boxed{3}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{4}\boxed{3}\boxed{2}, \quad \boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{3}\boxed{1}\boxed{4}.$$

3. Ответ: 4 разреза. Пример:

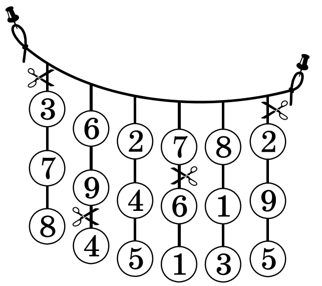


Рис. 12

Докажем, что трёх разрезов недостаточно.

Для того чтобы обойтись тремя разрезами, необходимо убрать по 3 цифры на каждой нитке. Докажем что это невозможно.

Пронумеруем нитки слева направо.

Обратим внимание на то, что вместе со второй ниткой нельзя оставить третью, четвёртую и шестую нитки, поскольку на них имеется по одной цифре, представленной на второй нитке. Остался единственный вариант, содержащий вторую нитку: первая, вторая и пятая, но он тоже невозможен, поскольку на первой и пятой нитках есть совпадающие цифры. Тем самым ясно, что вторая нитка остаться не может.

Первая нитка «несовместима» с четвёртой и пятой (совпадающие цифры), а вариант, где остались первая, третья и шестая нитки, невозможен из-за совпадения цифр у третьей и шестой ниток. Выяснили, что первая нитка остаться не может.

Третья нитка «несовместима» с шестой (совпадающие цифры) и не может остаться вместе с четвёртой и пятой из-за «несовместимости» четвёртой и пятой ниток.

Осталось рассмотреть один последний набор (четвёртая, пятая и шестая нитки), который невозможен из-за совпадения цифр на четвёртой и пятой нитках.

4. Ответ: а) нет; б) да.

а) Предположим, что требуемая расстановка существует. Посчитаем сумму всех сумм, составленных из трёх подряд идущих цифр. Поскольку каждая из сумм не превосходит 13, а всего сумм — 10, итоговая сумма не превосходит 130. С другой стороны, каждое число входит в итоговую сумму 3 раза, следовательно, итоговая сумма равна 135. Противоречие.

б) Пример:

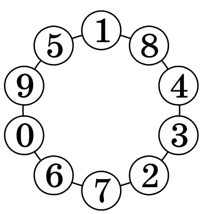


Рис. 13

5. Ответы: 1938+53, 1956+35, 1965+26.

Можно доказать, что всего решений три, но от участников этого не требовалось.

6. Ответ: $739 \times 937 = 692\,443$.

Последняя цифра произведения — 3, тогда возможны два случая (с точностью до перестановки множителей): $Н = 1$, $С = 3$ или $Н = 7$, $С = 9$.

Первый случай невозможен, так как

$$193 \times 391 < 80\,000.$$

Цифру, соответствующую букве О, находим подбором.

7. Заметим, что выполняется следующее неравенство:

$$\text{ДВА} \times \text{ШЕСТЬ} < \text{ДВА} \times 100\,000 < \text{ДВАДЦАТЬ}.$$

Следовательно, Вася прав.

8. Ответ: $90\,909 + 10\,101 = 101\,010$.

Заметим, что $У = 1$ (в каждом из слагаемых по пять цифр, а их сумма записывается шестью цифрами), то есть пример можно записать так:

$$\text{АГАГА} + \text{1Г1Г1} = \text{1Г1Г1Г}.$$

Так как $\text{ГА} + \text{Г1} = \text{1Г}$, получаем, что либо $Г + Г$ заканчивается на 1, либо $Г + Г + 1$ заканчивается на 1. Первый случай невозможен, а из второго получим, что $Г = 0$ или $Г = 5$. Если $Г = 5$, получаем, что $А = 4$, и этот случай не подходит. При $Г = 0$ получаем, что $А = 9$.

9. Ответ: нет.

Предположим, что число $\overline{\text{ПАНОРАМА}}$ кратно числу $\overline{\text{ПАНАМА}}$.

Вычтем из числа $\overline{\text{ПАНОРАМА}}$ число $\overline{\text{ПАНАМА00}}$.

Первые три цифры уменьшаемого и вычитаемого совпадают, поэтому разность окажется не более чем пятизначной.

При этом разность должна быть кратна шестизначному числу, что невозможно.

10. 1. Сумма кратна 2016, следовательно, она кратна 9.

Пусть число $\overline{\text{ТУРНИР}}$ имеет остаток X при делении на 9, тогда у числа $\overline{\text{АРХИМЕДА}}$ будет остаток $9 - X$ при делении на 9.

2. Остаток произвольного натурального числа при делении на 9 совпадает с остатком его суммы цифр.

Следовательно, сумма цифр числа $\overline{\text{ТУРНИР}}$ имеет остаток X при делении на 9, а сумма цифр числа $\overline{\text{АРХИМЕДА}}$ имеет остаток $9 - X$.

Значит, сумма $\text{Т} + \text{У} + \text{Р} + \text{Н} + \text{И} + \text{Р} + \text{А} + \text{Р} + \text{Х} + \text{И} + {}$ $+ \text{М} + \text{Е} + \text{Д} + \text{А}$ кратна 9.

При этом сумма $\text{Т} + \text{У} + \text{Р} + \text{Н} + \text{И} + \text{А} + \text{Х} + {}$ $+ \text{М} + \text{Е} + \text{Д}$ состоит из 10 различных цифр и, следовательно, равна 45, а значит, кратна 9. Поэтому сумма $\text{И} + \text{Р} + \text{А} + \text{Р}$ кратна 9.

3. Остаток при делении на 9 числа $\overline{\text{ИР}} + \overline{\text{АР}}$ равен сумме остатков при делении на 9 суммы $(\text{И} + \text{Р}) + (\text{А} + \text{Р})$, то есть сумма $\overline{\text{ИР}} + \overline{\text{АР}}$ кратна 9.

Комментарий. Ситуация, описанная в условии задачи, реализуема.

Например, $104\,384 + 24\,986\,752 = 25\,091\,136$.

Находить такой пример по условию задачи не требуется.

11. Возможны две расстановки:

$$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 43 + 21$$

и

$$9 + 8 + 7 + 65 + 4 + 3 + 2 + 1.$$

Если в сумме нет двузначных чисел, то данная сумма равна 45, что не соответствует требованию задачи. Если двузначное число одно, обозначим его первую цифру за x, а вторую — за $x-1$. Двузначное число равно $10x+x-1$. Получим равенство

$$99=45+(11x-1)-x-(x-1).$$

(Из суммы изъяли два слагаемых и составили двузначное число.) Получили, что $x=6$, а само двузначное число равно 65.

Если же двузначных чисел два, то возможна только такая расстановка:

$$9+8+7+6+5+43+21.$$

Легко проверить, что в остальных случаях сумма превосходит 99.

12. Ответ: 1) 12.02.2012; 2) 21.02.2012; 3) 22.10.2012; 4) 02.12.2012; 5) 20.12.2012.

На месте цифр месяца могут стоять только 01, 02, 10, 12.

Если 01, то получим 22.01.2012.

Если 02, то получим 12.02.2012 или 21.02.2012.

Если 10, то получим 22.10.2012.

Если 12, то получим 02.12.2012 или 20.12.2012.

13. $4-4+4-4=0$, $(4+4+4):4=3$,
$4-4+4:4=1$, $(4-4):4+4=4$,
$4:4+4:4=2$, $(4+4\cdot 4):4=5$.

14. а) $(2:3):(4:5:6)=5$;
б) $2:(((2-3):((3-4):4-5)):5)=52{,}5$.

15. Ответ: число 830 находится на 15-й горизонтали вверх и 4-й вертикали вправо от числа 1.

В квадрате из 29 строк и 29 столбцов размещается 841 число, причём число 841 расположено в верхнем правом углу, то есть на 15-й вертикали вправо и 15-й горизонтали вверх.

Число 830 расположено на 11 клеток левее числа 841, то есть на 4-й вертикали вправо от числа 1.

16. Ответ: 2010.

Сочетание цифр 2010 можно получить из цифр чисел 1020 и 1021: ...101910$\boxed{\mathbf{2010}}$21...

Число 2009 первый раз встречается среди четырёхзначных чисел только на «своём» месте: цифра 2 не может быть последней и предпоследней цифрой, так как тогда следующее число начиналось бы с 0. Если она третья с конца, то следующее число начинается с 9, что произойдёт значительно позже появления числа 2009.

Сочетание цифр 2009 среди трёхзначных чисел не встречается: цифра 2 не может быть первой у трёхзначного числа, иначе первая цифра следующего числа — 9, что невозможно. Не может быть она и второй или третьей цифрой, так как тогда следующее число начиналось бы с 0.

17. Ответ: да, мог.

Например, время отправления первого автобуса 19:58, а второго — 20:34.

Возможны и другие примеры.

18. Пример:

$$123\,456\,789 + 864\,197\,532$$

или

$$123\,456\,798 + 864\,197\,523\,.$$

19. Ответ: 123 456 789.

Других решений нет. Докажем это (от участников не требовалось).

Возьмём самое маленькое девятизначное число, составленное из данных цифр, 123 456 789, и умножим его на 8. Мы получим 987 654 312 — самое большое число, составленное из данных цифр, которое кратно 8.

20. Ответ: да.

$$\cancel{4}\boxed{1}\cancel{2384026},\quad \boxed{4}\cancel{12384026},\quad \cancel{4}\boxed{1}\cancel{238402}\boxed{6},$$
$$\cancel{412}\boxed{3}\cancel{8402}\boxed{6},\quad \boxed{4}\cancel{123}\boxed{84}\cancel{026}.$$

Перебирая возможные варианты, получим ответ. Учитываем, что квадраты натуральных чисел оканчиваются на цифры 0, 1, 4, 5, 6 и 9.

21. Ответ: не могло.

Перемножим числа, составленные из первых четырёх цифр каждого сомножителя. Получим

$$1127\ldots \times 1017\ldots = 114\ldots$$

Следовательно, исходное равенство невозможно.

22. Ответ: прав учитель.

Предположим, что прав Вася Иванов.

Сумма любых двух цифр меньше 19. Следовательно, перехода единицы из разряда в разряд быть не может: из того, что нет перехода единицы из крайнего правого разряда, следует, что нет перехода в следующем разряде, и так далее.

Таким образом, после перестановки для каждой цифры a_n исходного числа должна найтись такая цифра b_n нового числа, что $a_n + b_n = 9$, но, так как цифр 999, для одной цифры пары не найдётся, и её придётся складывать с той же цифрой. При этом 9 в сумме получиться не может. Противоречие.

23. Ответ: 1000.

Сумма вычитаемого и разности равна уменьшаемому. Следовательно, удвоенное уменьшаемое равно 2000.

24. Ответ: да. Пример: $64^2 \cdot 64^3 = 32^6$.

25. Ответ: можно.

Например, 1, 2, 3, 5.

26. Ответ: нельзя.

Предположим, что пять чисел x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, удовлетворяющих условию задачи, существуют.

Покажем, что дробные части всех пяти чисел равны. Действительно, если $x_1 + x_2$ и $x_1 + x_3$ — целые числа, тогда $\{x_1\} + \{x_2\}$ и $\{x_1\} + \{x_3\}$ тоже целые числа, а значит, $\{x_2\} = \{x_3\}$. (Запись $\{x\}$ обозначает дробную часть числа x.)

Так как $\{x_2\} + \{x_3\}$ — целое число и $\{x_2\} = \{x_3\}$, возможны два случая:

1) $\{x_2\} = \{x_3\} = 0$ или 2) $\{x_2\} = \{x_3\} = 0{,}5$.

Аналогично можно доказать, что дробные части всех чисел одинаковы и равны либо 0, либо $0{,}5$.

В сумму попарных сумм каждое из чисел x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 входит четырежды, следовательно, эта сумма является чётным числом. Из этого следует, что сумма 10 последовательных целых чисел — чётное число.

В действительности же сумма 10 последовательных целых чисел нечётна, так как

$$a + (a + 1) + \ldots + (a + 9) = 10a + 1 + 2 + \ldots + 9 = 10a + 45.$$

Противоречие.

27. Ответ: нет.

Пример: 12 гирь весом 1 г и одна гиря весом 3 г. Если убрать гирю весом 3 г, то останется 12 гирь по 1 г, которые легко уравнять на весах, поставив на чашки весов по 6 гирь.

Если убрать одну гирю весом 1 г, то остальные можно уравновесить на чашках весов, положив 7 гирь весом 1 г на одну чашку весов, а на другую чашку — 4 гири весом 1 г и одну гирю весом 3 г.

28. Ответ: да.

Представим сумму в виде

$$(n-499)+\ldots+n+\ldots(n+499)=999n=3^3\cdot 37n.$$

Данная сумма является кубом натурального числа, например, при $n=37^2$.

29. Ответ: а) нельзя; б) можно.

а) В самом деле, если число имеет не больше трёх цифр, то его квадрат — не больше шести цифр, в итоге одна цифра останется незадействованной. Если же число имеет не меньше четырёх цифр, то его квадрат — не меньше семи цифр, а это в сумме даёт 11 цифр, то есть как минимум одна из цифр будет использована дважды.

б) Например, с помощью 10 различных цифр можно записать квадрат и куб числа 69 (4761 и 328509).

30. Ответ: см. рис. 16.

Сначала восстановим число в ячейке $a1$ (рис. 14). Заметим, что сумма чисел в ячейках $a1$, $b2$, $c3$ равна сумме цифр в ячейках $c1$, $c2$ и $c3$, то есть $9+24=15+x$.

Таким образом, $x=18$.

3			
2		15	9
1	x		24
	a	b	c

Рис. 14

3	y		
2		15	9
1	18		24
	a	b	c

Рис. 15

На втором шаге восстановим число в ячейке $a3$ (рис. 15). Рассуждая аналогично, получим, что

$9+15=18+y$ и $y=6$. Сумма чисел на каждой диагонали равна 45. И так далее.

3	6	27	12
2	21	15	9
1	18	3	24
	a	b	c

Рис. 16

31. Ответ: $a=17$.

Нарисуем магический квадрат, обозначив неизвестные «угловые» числа буквами x и y (см. рис. 17). Тогда $x+y=a$.

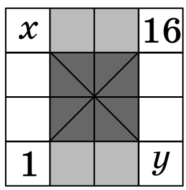


Рис. 17

Сумма первых 16 последовательных натуральных чисел равна 136. Следовательно, сумма чисел, стоящих на каждой диагонали, в каждом столбце или строке, в 4 раза меньше и равна 34.

Значит, сумма чисел в верхнем «сером» прямоугольнике равна

$$34-16-x=18-x,$$

а в нижнем «сером» прямоугольнике равна

$$34-1-y=33-y.$$

Сумма чисел, стоящих на диагоналях, равна 68. Вычитая числа, стоящие в углах, получаем сумму чисел, находящихся в «тёмном» квадрате:

$$68-1-16-y-x=51-y-x.$$

Найдём сумму цифр во всех закрашенных клетках:

$$18 - x + 51 - y - x + 33 - y = 68,$$

а значит, $2(x + y) = 34$, и мы получаем, что

$$a = x + y = 17.$$

32. Ответ: нельзя.

Предположим, что указанная расстановка возможна. Пусть меньшее из чисел равно a. Тогда их сумма равна

$$a + (a + 1) + \ldots + (a + 7) = 8a + 28.$$

Заметим, что $8a + 28$ — это удвоенная сумма чисел в таблице:

$$(1 + 2 + \ldots + 16) \cdot 2 = 272.$$

Тогда $8a + 28 = 272$, а значит, $2a + 7 = 68$, что невозможно, так как в правой части нечётное число, а в левой — чётное. Противоречие.

33. Ответ: нельзя.

Сумма всех чисел равна 4900, значит, сумма чисел в любых строке или столбце должна равняться 980.

Можно проверить, что квадраты натуральных чисел либо кратны 4, либо при делении на 4 дают остаток 1. В таблице квадратов первого вида 13, а второго — 12. Число 980 кратно 4, а это означает, что сумма остатков от деления на 4 в любой строке и любом столбце должна быть равна либо 0, либо 4.

Рассмотрим квадраты, дающие остаток 1 при делении на 4. Если такое число встречается в некоторой строке, то это означает, что в ней будет ровно 4 таких числа. То же верно и для любого столбца. Тогда нам потребуется 16 таких чисел, а у нас их всего 12. Следовательно, составить магический квадрат нельзя.

34. Ответ: а) нельзя, б) можно.

а) Сумма $1 + 2 + \ldots + 12 = 78$ не делится на 4.

б) Например, см. рис. 18.

12	7	6	1
11	8	5	2
10	9	4	3

Рис. 18

35. Ответ: верно.

Разобьём квадрат 6×6 на 9 квадратов 2×2. Если предположить, что во всех квадратах сумма чисел нечётна, то общая сумма всех чисел также будет нечётной. Однако сумма всех записанных чисел равна 666.

Противоречие. Следовательно, хотя бы в одном из квадратов 2×2 сумма чётна.

36. Ответ: верно.

На рис. 19 и 20 показаны возможные варианты требуемой расстановки; нечётным числам соответствуют клетки с чёрной точкой, а чётным — пустые клетки.

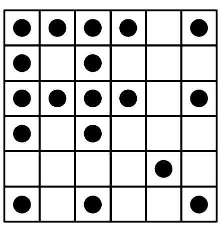


Рис. 19

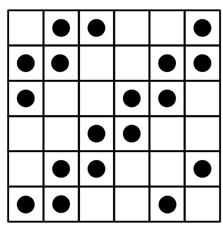


Рис. 20

37. Ответ: наименьшее среди наибольших чисел больше, чем наибольшее среди наименьших чисел.

Пусть M — наименьшее среди наибольших чисел — находится в столбце m, а N — наибольшее среди наименьших чисел — находится в строке n. Пусть на пересечении столбца m и строки n стоит число K. Тогда $K\geq N$ и $M\geq K$, значит, $M>N$ (M и N — разные числа).

38. Ответ: только 0.

Каждое двузначное число представляет собой сумму десятков и единиц. Заметим, что сумма десятков всех чисел будет равна 0, потому что у всех чисел, стоящих в одном столбце, одинаковое число десятков и перед половиной чисел стоит знак минус. Аналогично сумма единиц всех чисел равна 0, потому что у всех чисел в одной строке количество единиц одно и то же и перед половиной из них стоит знак минус. Следовательно, как бы мы ни расставляли минусы в соответствии с условием задачи, сумма всех чисел будет равна 0.

39. Ответ: а) нет; б) да.

а) Пусть на гранях записано шесть последовательных натуральных чисел, $n-2$ — наименьшее из них, а S — их сумма. Тогда

$$S=(n-2)+(n-1)+n+(n+1)+(n+2)+(n+3)=6n+3.$$

Каждая вершина принадлежит трём граням куба, следовательно,

$$S=(1+2+\ldots+8)\cdot 3=108.$$

Уравнение $6n+3=108$ не имеет решений в натуральных числах, так как в его левой части стоит нечётное число, а в правой части — чётное.

б) Примеры см. на рис. 21—23.

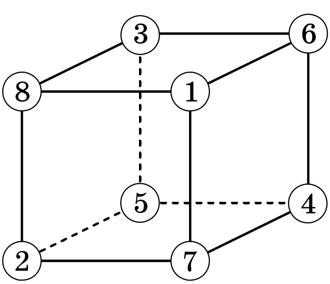


Рис. 21

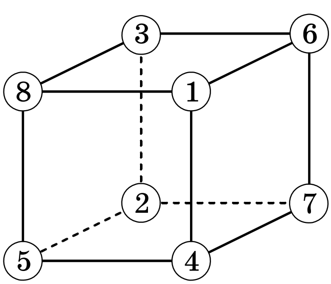


Рис. 22

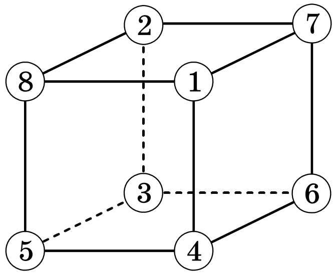


Рис. 23

40. Ответ: можно. Пример см. на рис. 24.

41. Ответ: а) можно; б) не может.

а) На рис. 25 вычеркнуто число 3; на рис. 26 вычеркнуто число 7; на рис. 27 вычеркнуто число 11;

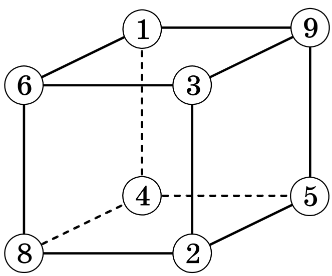


Рис. 24

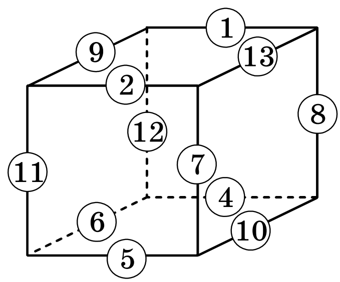


Рис. 25

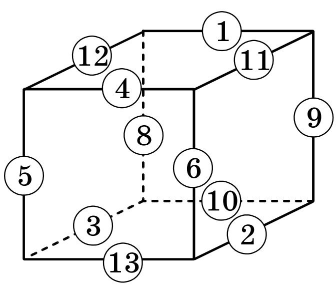


Рис. 26

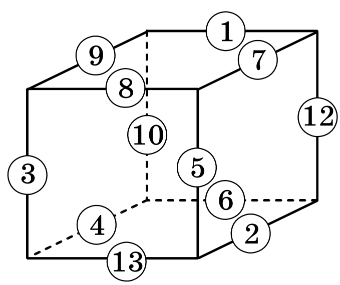


Рис. 27

б) Предположим, что вычеркнуто число 13 и указанная расстановка возможна. Сложим получившиеся суммы. Это число кратно 8, так как все суммы одинаковы. С другой стороны, числа от 1 до 12 входят в указанную сумму дважды, но 156 не кратно 8.

42. Ответ: 317.

Так как сумма цифр искомого числа $x = \overline{abc}$ заведомо не превышает 27, имеем $300 < x < 328$. Далее, так как $28 - \overline{bc} = b + c + 3$, получаем, что $25 = 11b + 2c$, откуда находим $b = 1$ и $c = 7$.

43. Ответ: нет, неверно.

Например, если Вася задумал число 91, а Петя — число 100, то оба получили сумму 101.

44. Ответ: да, существует.

Например, 39, 48, 49, 79.

При возведении в квадрат числа, оканчивающегося на 8 или на 9, последняя цифра уменьшается.

45. Ответ: 1999.

Среди трёхзначных чисел наибольшую сумму цифр имеет число 999, следовательно, сумма цифр искомого четырёхзначного числа должна быть больше.

46. Ответ: 100.

Для числа 100 это отношение равно 100. Докажем, что больше 100 отношение получиться не может. Имеем

$$\frac{100a + 10b + c}{a + b + c} \le \frac{100a + 100b + 100c}{a + b + c} = 100.$$

Равенство возможно, если $b = c = 0$.

47. Ответ: да, например, пусть

$$a = 1\underbrace{999\ldots999}_{223\text{ раза}},\ b = 2\underbrace{999\ldots999}_{223\text{ раза}}.$$

Сумма цифр числа a равна $9 \cdot 223 + 1 = 2008$, сумма цифр числа b равна $9 \cdot 223 + 2 = 2009$.

Тогда число $a + b$ равно $4\underbrace{999\ldots999}_{222\text{ раза}}8$.

Сумма цифр числа $a+b$ равна $4+9\cdot 222+8=2010$.

Возможны и другие примеры.

48. Ответ: нет.

Так как число a при делении на 3 даёт в остатке 2, а число b кратно 3, число $a+b$ не может при делении на 3 давать остаток 1.

49. Ответ: 44, 50, 47.

Ясно, что число a не превышает 59, а тогда сумма его цифр не превышает 14, и в этом случае сумма цифр второго числа не превышает 9, поэтому достаточно рассмотреть два случая

1. Число a двузначное, b и c однозначные.

Тогда $a=10x+y$, $b=c=x+y$.

Получим уравнение:

$$a+b+c=12x+3y=60,$$

$$4x+y=20.$$

Учитывая, что x и y — цифры, перебором находим два решения: $x=y=4$ и $x=5$, $y=0$.

2. Если же числа a и b двузначные, а число c однозначное, то

$$c=x+y-9 \text{ и } a+b+c=12x+3y=69,$$

а значит,

$$4x+y=23 \text{ и } x=4,\ y=7.$$

50. Ответ: 27 000 001.

Первое решение. Будем записывать числа в виде

$$000\,001,\ \ldots,\ 999\,999.$$

Тогда среди указанных чисел в каждом разряде все цифры встречаются одинаковое количество раз — 10^5 раз. Сумма всех цифр равна

$$(1+2+3+4+5+6+7+8+9)\cdot 10^5\cdot 6=27\,000\,000\,.$$

Итого получаем $27\,000\,001$.

Второе решение. Разобьём числа от 1 до 999 998 на пары:

(1; 999 998), (2; 999 997), ..., (142 375; 857 624), ...

Получится 499 999 пар, сумма цифр в каждой из которых равна 54.

Добавив суммы цифр чисел 999 999 и 1 000 000, получаем, что сумма всех цифр равна

$$54\cdot 500\,000+1=27\,000\,001\,.$$

51. Ответ: 429.

Среднее арифметическое этих десяти чисел равно $(345\cdot 6+555\cdot 4):10$.

52. Ответ: нет.

Предположим, что среднее арифметическое 35 целых чисел равно 6,35, тогда их сумма не является целым числом. Противоречие.

53. Ответ: 7.

Например, один из мешков — 230 кг, а остальные по 190 кг.

54. Ответ: неверно.

Пример: 30, 30, 120, 30, 30, 120, ..., 120, 30, 30.

Среднее арифметическое любых трёх подряд идущих чисел равно 60, а среднее арифметическое всех чисел — 57.

55. Ответ: а) да; б) нет.

а) Достаточно привести пример.

Вася: 6, 8, 11, 12 и 13. Среднее арифметическое: 10.

Петя: 1, 3, 7, 9 и 10. Среднее арифметическое: 6.

б) Среднее арифметическое различных чисел меньше самого большого из чисел.

Среднее арифметическое чисел Петиного набора меньше самого большого числа Петиного набора, которое равно среднему арифметическому чисел Васиного набора, а оно, в свою очередь, меньше самого большого числа из Васиного набора

Следовательно, равенство невозможно.

56. Ответ: можно выбрать всего два набора по 5 карточек, они показаны на рис. 28 и рис. 29.

$\boxed{1}+\boxed{4}+\boxed{3}+\boxed{0}+\boxed{5}=13$

Рис. 28

$\boxed{1}+\boxed{2}+\boxed{3}+\boxed{0}+\boxed{7}=13$

Рис. 29

Так как общая сумма нечётна, в серых ячейках могут быть только нечётные числа. Тогда в белых ячейках лежат чётные числа. Рассмотрим следующие случаи:

1) $1+3+5=9$, тогда в белых ячейках лежат цифры 0 и 4;

2) $1+3+7=11$, тогда в белых ячейках лежат цифры 0 и 2;

3) $1+5+7=13$, тогда сумма чисел в белых ячейках равна 0, что невозможно;

В остальных случаях сумма нечётных чисел будет больше 13.

57. Предположим, что в школе обучается x мальчиков, тогда девочек — $x+303$, а всего в школе обучается $2x+303$ человек, что должно быть равно 3688.

Вероятно, Вася заметил, что в левой части уравнения стоит нечётное число, а в правой — чётное. Противоречие.

58. Ответ: 3, 5, 7, 9, 13.

Наименьшая возможная сумма нечётных чисел (бо́льших единицы) равна $3+5+7+9+11=35$. Единственный способ увеличить её на 2 — заменить число 11 числом 13 (иначе одно из чисел будет записано дважды, что противоречит условию).

59. Ответ: нет, не может.

Заметим, что числа a, b — одинаковой чётности (оба чётные или оба нечётные). Это означает, что $7a$ и $3b$ имеют одинаковую чётность. Сумма $7a+3b$ чётна и не может равняться нечётному числу 627.

60. Ответ: нет, нельзя.

Предположим, что это возможно. Тогда сумма чисел, лежащих в каждом конверте, чётна, и сумма всех чисел на всех карточках также чётна.

Но сумма чисел $1+2+3+\ldots+25=13\cdot 25$ нечётна. Противоречие.

61. Ответ: нельзя.

С одной стороны, сумма полученных пяти нечётных чисел нечётна, а с другой стороны, в эту сумму каждое из вписанных в кружки звезды чисел входит ровно два раза, и, следовательно, эта сумма чётна. Противоречие.

62. Ответ: нельзя.

Вес неполного набора гирь — нечётное число, следовательно, набор нельзя разделить на две равные по весу кучки.

63. Ответ: нет.

Предположим, что нам удалось придумать такой пример. Пусть a — делимое, b — делитель, c — частное, d — остаток. Тогда $a=bc+d$. Так как a нечётно, а $bc+d$ чётно, равенство невозможно. Противоречие.

64. Ответ: нет.

Равенство $1*2*3*4*5*6*7*8*9=20$ не может быть верным, так как сумма (алгебраическая) нечётного количества нечётных слагаемых не может равняться чётному числу.

65. Ответ: остаток равен 9.

Пусть данное число равно x, k — частное от деления, а 99 — остаток.

Получим равенство $x = 2007k + 99$. Заметим, что x кратно 9 как сумма двух чисел, кратных 9.

С другой стороны, при делении x на 18 получим равенство вида $x = 18p + t$, где p — частное, а t — остаток ($0 \le t \le 17$) и t делится на 9. Так как x нечётное, получаем, что $t \ne 0$. Единственное число, удовлетворяющее этому условию, — 9.

66. Ответ: да.

Переставим слагаемые в исходной сумме и объединим их в пары:

$$(1 + 1992) + (2 + 1991) + \ldots + 1993.$$

Полученная сумма состоит из слагаемых, каждое из которых равно 1993, следовательно, вся сумма кратна 1993.

67. Ответ: см. рис. 30.

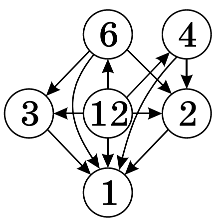


Рис. 30

68. Ответ: 121.

Представим искомое число в виде произведения простых множителей. Из условия задачи следует, что каждый из этих множителей не может быть меньше чем 11. Следовательно, искомое число — $11^2 = 121$.

69. Ответ: 19 чисел.

Легко проверить, что число 60 удовлетворяет условию. Действительно, $60 : 10 = 6$, и число 60 делится на 1, 2, 3, 4, 5 и 6.

Докажем, что число, большее 60, не может быть решением задачи. Действительно, если $n > 60$ удовлетворяет условию задачи, то n делится на 1, 2, 3, 4, 5 и 6, а следовательно, делится на 60, то есть имеет вид $n = 60t$.

По условию задачи n кратно взаимно простым числам $6t$ и $6t-1$, следовательно, n кратно и $6t(6t-1)$.

Получим

$$n \ge 6t(6t-1),\ 60t \ge 6t(6t-1),\ 10 \ge 6t-1,\ 11 \ge 6t.$$

Единственное решение неравенства в натуральных числах: $t = 1$ и $n = 60$.

Осталось рассмотреть числа, меньшие 60.

Перебором убедимся, что условию удовлетворяют:

1) во втором десятке все числа от 10 до 19 включительно (все они кратны 1);

2) в третьем десятке все чётные числа от 20 до 28 (они кратны 1 и 2);

3) в четвёртом десятке числа только числа 30 и 36 (они кратны одновременно 1, 2 и 3);

4) в пятом десятке только число 48 (оно кратно 1, 2, 3 и 4).

Итого: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 36, 48, 60.

70. Ответ: нет.

Заметим, что $2005 = 5 \cdot 401$, а число 401 простое.

71. Ответ: да.

Среди чисел вида

$$1999^1,\ 1999^2, \ldots,\ 1999^m, \quad \text{где } m = 10^{1999} + 1,$$

найдутся два, которые при делении на 10^{1999} дают одинаковые остатки.

Пусть это 1999^p и 1999^k, где $p > k$, тогда

$$1999^p - 1999^k = 1999^k(1999^{p-k} - 1).$$

Последнее число кратно 10^{1999}, следовательно, число $1999^{p-k} - 1$ кратно 10^{1999}, что и требовалось.

72. Ответ: при $n = 6$; таких чисел бесконечно много.

Обозначим число, составленное из n двоек, через A_n.

Перебором можно убедиться, что $A_6 = 222222$ — наименьшее из таких чисел, кратное 2002.

При $n = 6k$, где k — любое натуральное число, числа A_n кратны 222222, а следовательно, кратны 2002.

73. Представим выражение $9a + b + 4c$ в виде

$$9a + b + 4c = 3(3a + 4b + 5c) - 11(b + c).$$

Так как числа $3(3a + 4b + 5c)$ и $11(b + c)$ кратны 11, число $9a + b + 4c$ тоже кратно 11.

74. Докажем вначале, что $19(a + b) = 116b$. Действительно, $116b$ можно представить в виде суммы чисел $19b$ и $97b$, откуда, учитывая, что $19a = 97b$, получим $116b = 19(a + b)$. Так как число 19 простое и его нельзя «сократить» с числом 116, получим, что $a + b$ кратно 116.

75. Ответ: равенство неверно.

Это можно доказать, например, так:

$$3^{100} = (3^4)^{25} = (81)^{25} \text{ и } 7^{100} = \left(7^4\right)^{25} = \left(2401\right)^{25},$$

следовательно, 3^{100} и 7^{100} оканчиваются на 1;

$$8^{100} = (8^4)^{25} = (4096)^{25},$$

следовательно, 8^{100} оканчивается на 6.

Таким образом, $3^{100}+7^{100}$ оканчивается на 2, 8^{100} оканчивается на 6, следовательно, $3^{100}+7^{100}\neq 8^{100}$.

76. Ответ: 111222333444555666777889.

Пусть $999x = 11\ldots11$, тогда $x = 1000x - 11\ldots11$.

Поскольку $1000x$ оканчивается на три нуля, получаем, что $x = \ldots889$ и $1000x = \ldots889000$.

Далее,

$$x = 1000x - 11\ldots11 = \ldots889000 - 11\ldots11 = \ldots777889,$$

$$1000x = \ldots777889000.$$

Продолжая аналогично, получим ответ.

77. Ответ: заболело 5 детей.

Число участвовавших кратно 5, так как мальчиков участвовало в олимпиаде в 4 раза меньше, чем девочек. Следовательно, число заболевших тоже кратно 5. Поскольку шестиклассников участвовало на 17 меньше, чем семиклассников, число участников (и заболевших) нечётно. Таким образом, число участвовавших кратно 5, но не 10. А поскольку дети заболели только в одной команде, не пришло 5 детей.

78. Ответ: 16 дощечек.

Мысленно разделим все дощечки забора на «пятёрки» (возможно, с остатком).

Том покрасил одну дощечку в каждой полной пятёрке (пятую по счёту), затем Гек покрасил ещё одну дощечку в каждой полной пятёрке (четвёртую по счёту), затем Том покрасил одну дощечку в каждой полной пятёрке (третью по счёту).

После этого на долю Гека остались две дощечки в каждой полной пятёрке (первая и вторая).

По условию на долю Гека осталось 7 дощечек. Это означает, что полных пятёрок было три и ещё одна дощечка из неполной пятёрки. Таким образом, дощечек было $5\cdot 3+1=16$.

79. Ответ: см. рис. 31.

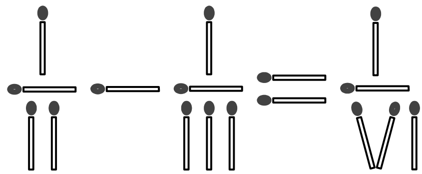


Рис. 31

80. Ответ: неравенство верно.

Заменим каждую из дробей $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{12}$, ..., $\frac{1}{99}$ на дробь $\frac{1}{100}$. Левая часть неравенства при этом уменьшается. Получим

$$\frac{1}{10}+\left(\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{100}\right)>\frac{1}{10}+\left(\frac{1}{100}+\ldots+\frac{1}{100}\right)=\frac{1}{10}+\frac{90}{100}=1.$$

81. Ответ: первая и вторая овцы справятся быстрее.

Сравним ежедневные рационы. Для этого выясним, что больше:

$$1+\frac{1}{2} \quad \text{или} \quad \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}, \quad \text{а} \quad \frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}<\frac{1}{4}\cdot 4=1.$$

82. Ответ: да.

Представим 1 в виде суммы квадратов двух дробей. Например, так:

$$1=\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2.$$

Покажем теперь, как получить представление 1 в виде суммы сколько угодно большого числа квадратов дробей.

При умножении одного из слагаемых на эту сумму (то есть на 1) количество слагаемых увеличится на 1.

Если при этом домножать наименьший из имеющихся квадратов, то полученная сумма будет вновь состоять из попарно различных дробей.

83. Ответ: а) да; б) нет.

а) Например, так: $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=0$.

б) Умножим обе части на $2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8$.

В левой части получим сумму слагаемых

$$3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8,\quad 2\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8,\quad 2\cdot3\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8,$$
$$2\cdot3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot8,\quad 2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot7\cdot8,\quad 2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot8,$$
$$2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7,$$

а в правой части получим 0.

Таким образом, правая часть равенства будет кратна 5, а в левой части все слагаемые, кроме одного, кратны 5.

Следовательно, равенство невозможно.

84. Ответ: 36 и 34.

Число рыб, пойманных вторым рыбаком, кратно 17, следовательно, оно может быть равно 17, 34, 51 или 68, число же рыб, пойманных первым, может равняться (соответственно) 53, 36, 19 или 2. Но число рыб, пойманных первым, должно быть кратно 9, откуда получим ответ.

85. Ответ: единиц больше, чем девяток.

Для решения задачи воспользуемся тем, что натуральное число при делении на 9 имеет тот же остаток, что и сумма его цифр.

В итоге получим следующий ряд чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ... (набор 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, повторяется периодически). Так как 199920002001 при делении на 9 даёт в остатке 6, данный ряд заканчивается цифрой 6. Следовательно, единиц в этом ряду больше, чем девяток.

86. Ответ: 7.

Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ — десятичные записи некоторых чисел.

Докажем, что числа $\overline{ab}$ и $\overline{a}+\overline{b}$ имеют одинаковые остатки при делении на 9.

Действительно,

$$\overline{ab}-(\overline{a}+\overline{b})=\overline{a}\cdot 10\ldots 0+\overline{b}-(\overline{a}+\overline{b})=\overline{a}\cdot 99\ldots 99.$$

Убедимся, что остаток от деления числа $\overline{ab}=19921993\ldots 2002$ на 9 равен 7.

Указанный остаток равен остатку от деления на 9 суммы

$$1+9+9+2+1+9+9+3+\ldots+2+0+0+2,$$

или, что то же самое, суммы

$$1+2+1+3+\ldots+2+0+0+2=52$$

(она отличается от предыдущей суммы отсутствием слагаемых, кратных 9).

Остаток от деления 52 на 9 равен 7.

87. Ответ: 111 111 111.

У чисел с одинаковой суммой цифр будут одинаковые остатки при делении на 9. Тогда разность двух чисел, получаемых друг из друга перестановкой цифр, кратна 9. Следовательно, число $A-B$ содержит не менее девяти единиц.

Пример: $987\,654\,320-876\,543\,209=111\,111\,111$.

88. Ответ: $23673\underline{63}67459211723401$.

Рассмотрим число $109^{10}-1$. Его можно записать как $(108+1)^{10}-1$ и как $(110-1)^{10}-1$.

1. Докажем, что

$$23673**67459211723400$$

кратно 9 и 11.

Если в выражении $(108+1)^{10}-1$ раскрыть все скобки, то после приведения подобных слагаемых получатся слагаемые, кратные 108, а значит, кратные 9.

Кратность 11 доказывается аналогично.

2. Из признака делимости на 9 следует, что сумма цифр, стоящих на месте звёздочек, может быть равна 0, 9 или 18.

3. Из признака делимости на 11 следует, что разность между цифрой, стоящей на месте первой звёздочки, и цифрой, стоящей на месте второй, равна 3 или -8.

4. Следовательно, вместо первой звёздочки стоит цифра 6, а вместо второй — цифра 3.

89. Ответ: бесконечно много.

Суммы цифр чисел 519 999 и 520 000 кратны 7 — это первая пара. Дописав 7 девяток справа к первому числу и 7 нулей ко второму числу, получим ещё одну пару. И так далее.

90. Ответ: 26 цифр.

Заметим, что искомое число кратно 9. Следовательно, чтобы в записи числа цифр было поменьше, желательно использовать в нём девятки, поэтому наименьшее число, кратное 9, сумма цифр которого равна 225, записывается с помощью 25 девяток. Однако, чтобы число было кратно 225, оно должно быть кратно ещё и 25, то есть оканчиваться на 00, 25, 50 или 75. Таким образом, 25 цифрами обойтись не удастся.

Достаточно ли 26 цифр? Да, например, число $6\underbrace{9\ldots9}_{23\text{ раза}}75$ кратно 225 и содержит ровно 26 цифр.

91. Ответ: да, можно.

См. рис. 32.

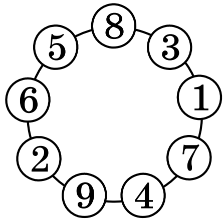


Рис. 32

92. Ответ: а) можно; б) нельзя.

а) См. рис. 33.

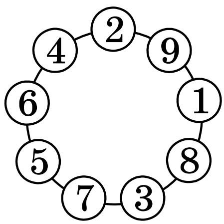


Рис. 33

б) Пусть сумма в каждой тройке соседних чисел больше 12.

Так как сумма чисел в тройке кратна 3, она должна быть не меньше 15. Так как сумма всех девяти чисел от 1 до 9 равна 45, сумма в каждой тройке равна 15, то есть число 15 требуется набрать 9 разными способами из предложенных чисел, что невозможно.

93. Ответ: 16 раз.

Среди делителей числа $100! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 100$ два делятся на 7^2 и ещё двенадцать чисел делятся на 7. Следовательно, 100! можно разделить на 7 без остатка 16 раз.

94. Ответ: чётной.

Пусть в записи числа $A = 100!$ после выполнения всех умножений справа получилось несколько нулей (24 нуля, но для решения данной задачи это не существенно). Зачеркнуть нули в конце числа — значит разделить (сократить) число на некоторую степень числа 10. Результат будет числом чётным, так как в разложении числа на простые множители 2 встречается чаще, чем 5.

95. Ответ: 2.

Представим число 50! в виде произведения простых множителей:

$$50! = 2^{47} \cdot 3^{22} \cdot 5^{12} \cdot 7^{8} \cdot 11^{4} \cdot 13^{3} \cdot 17^{2} \times$$
$$\times 19^{2} \cdot 23^{2} \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47.$$

В это произведение входит 5 в степени 12. Поэтому 50! оканчивается на 12 нулей. Чтобы получить ответ, требуется «сократить» 50! на 5^{12} и 2^{12}, а у оставшихся множителей найти произведение последних цифр. Последняя цифра полученного произведения будет ответом. Она совпадает с последней цифрой числа $2^{35} \cdot 3^{34} \cdot 7^{12}$, что совпадает с последней цифрой числа $6 \cdot 2^{3} \cdot 3^{2}$.

96. Ответ: Вася не ошибся.

Например, число 8055! окачивается на 2011 нулей. Действительно,

$$\left[\frac{8055}{5}\right] + \left[\frac{8055}{25}\right] + \left[\frac{8055}{125}\right] + \left[\frac{8055}{625}\right] + \left[\frac{8055}{3125}\right] =$$
$$= 1611 + 322 + 64 + 12 + 2 = 2011,$$

где $[x]$ — целая часть числа.

Также это справедливо для чисел 8056!, 8057!, 8058!, 8059!. Убедитесь в этом самостоятельно.

97. Ответ: $\frac{11}{126}$.

Число кратно 11, если четыре его цифры, взятые через одну, в сумме дают 17 (тогда остальные дают в сумме 28) либо 28 (тогда остальные дают в сумме 17).

1. Четыре цифры могут дать в сумме 17 девятью способами:

2, 3, 4, 8; 1, 3, 4, 9; 2, 4, 5, 6; 2, 3, 5, 7;
1, 4, 5, 7; 1, 3, 5, 8; 1, 3, 6, 7; 1, 2, 6, 8;
1, 2, 5, 9.

2. Четыре цифры могут дать в сумме 28 двумя способами:

4, 7, 8, 9 и 5, 6, 8, 9.

Получили 11 подходящих расстановок. В каждом из случаев 4 цифры можно переставить $4! = 24$ способами, а оставшиеся 5 цифр $5! = 120$ способами, что даёт $24 \cdot 120 = 2880$. Всего $2880 \cdot 11$ способов. С другой стороны, возможных перестановок цифр существует ровно $9!$.

Итого получаем $\frac{4! \cdot 5! \cdot 11}{9!} = \frac{11}{126}$ (приблизительно $8{,}73\%$).

Глава II

Арифметика и немного алгебры

ГЛАВА II

АРИФМЕТИКА И НЕМНОГО АЛГЕБРЫ

Доли и проценты

98. В стаде, состоящем из лошадей, двугорбых и одногорбых верблюдов, в общей сложности 200 горбов. Сколько животных в стаде, если количество лошадей равно количеству двугорбых верблюдов?

99. Перед очередным плаванием экипаж капитана Флинта пополнился на 20 человек. «Что ж, неплохо, — подумал Флинт, — однако придётся пополнить запасы питьевой воды, иначе нам нечего будет пить целую неделю». Капитан выходит в море на 4 недели. Сколько человек у него на корабле, если известно, что пираты расходуют воду равномерно?

100. На одной ферме число коров на $12{,}5\,\%$ меньше, чем на другой, но средний удой каждой коровы на $8\,\%$ выше. На какой ферме получают молока меньше и на сколько процентов?

101. В выборах поселкового совета участвовали 900 жителей села. За кандидата A проголосовали $15\,\%$ женщин и $20\,\%$ мужчин, всего 159 жителей. Сколько женщин и мужчин участвовало в голосовании?

102. В деревне две трети всех мужчин женаты и три пятых всех женщин замужем. Какая доля взрослых жителей деревни состоит в браке?

103. Демографическая проблема. В некотором царстве $20\,\%$ всех женщин замужем, $25\,\%$ всех мужчин женаты, $20\,\%$ населения составляют дети. Выясните, какой процент населения состоит в браке.

104. Мартышка принесла из джунглей несколько бананов. Три самых больших банана ($\frac{7}{20}$ общего веса) она съела на завтрак, три самых маленьких ($\frac{1}{4}$ общего веса) — на ужин. Остальные бананы она съела на обед. Сколько всего бананов съела Мартышка?

105. Двойки в дневнике. У Феди в дневнике было на $10\,\%$ больше двоек, чем у Лизы. Федя исправил $10\,\%$ своих двоек, а Лиза — $1\,\%$ своих. У кого из них осталось больше неисправленных двоек?

106. Бюджет семьи. В семье 4 человека. Если Маше удвоят стипендию, то общий доход семьи возрастёт на $5\,\%$, если вместо этого маме удвоят зарплату — то на $15\,\%$, если же зарплату удвоят папе — то на $25\,\%$. На сколько процентов возрастёт доход всей семьи, если дедушке удвоят пенсию?

107. Как выгоднее? В каком случае вкладчик получит больше денег: если банк начисляет доход $12\,\%$ раз в год или если он начисляет $1\,\%$ раз в месяц на имеющуюся на тот момент сумму?

108. Два числа. Известно, что $2\,\%$ натурального числа a больше, чем $3\,\%$ натурального числа b. Верно ли, что $5\,\%$ числа a больше, чем $7\,\%$ числа b?

109. Было два положительных числа. Одно из них увеличили на $1\,\%$, другое — на $5\,\%$. Могла ли их сумма увеличиться на $3\,\%$?

110. Две дроби. Числитель дроби увеличили на $20\,\%$. Как следует изменить знаменатель, чтобы дробь возросла вдвое?

111. Овцы и бараны. В отаре $45\,\%$ баранов, причём их вес составляет $55\,\%$ веса всей отары. Известно, что вес овцы 81 кг. Сколько весит баран?

112. На завтрак Малыш и Карлсон ели конфеты, причём Карлсон съел все свои конфеты, а Малыш только 20 % своих конфет. Известно, что вместе они съели 80 % всех конфет, имевшихся у них до завтрака. У кого из них до завтрака было больше конфет и во сколько раз?

113. Похудеть к лету. За весну Обломов похудел на 25 %, затем за лето поправился на 20 %, затем за осень похудел на 10 %, а за зиму прибавил 20 %. Похудел он в итоге или поправился?

114. Вера и Аня посещают математический кружок, в котором больше 91 % мальчиков. Найдите наименьшее возможное количество участников кружка.

115. Шахматный турнир. В круговом турнире шахматистов (каждый по одному разу играет со всеми остальными участниками, причём за победу даётся 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за поражение — 0) участвуют 30 человек. Чтобы выполнить норму IV разряда, достаточно набрать 60 % очков. Сколько партий будет сыграно в турнире? Какое наибольшее число шахматистов могут стать разрядниками по итогам турнира?

116. В заповедном лесу растут ели, сосны и пихты. Известно, что елей на 20 % больше, чем сосен, и на 25 % больше, чем пихт. Известно, что пихт на 144 меньше, чем сосен. Сколько в заповедном лесу елей?

117. Пятачку на день рождения подарили несколько разноцветных шариков, причём красных шариков среди них было 45 %. После того как Пятачок отдал один синий шарик и один зелёный шарик Ослику Иа-Иа, красных шариков стало ровно половина. Сколько шариков подарили Пятачку на день рождения?

Смеси

118. Аптечная смесь. В трёхлитровой банке находится литр спирта, а в пятилитровой — литр воды. Разрешается переливать из одного сосуда в другой любое количество жидкости. Можно ли в результате нескольких переливаний получить в пятилитровой банке раствор с концентрацией спирта 54 %?

119. Морская вода содержит 5 % соли. Сколько пресной воды нужно добавить к 40 кг морской, чтобы содержание соли в смеси стало 2 %?

120. Про грибы. Влажность свежих грибов 99 %, а сушёных 98 %. Как изменился вес грибов в результате подсушивания?

121. Говядина без костей стоит 90 рублей за килограмм, говядина с костями — 78 рублей за килограмм, а кости без говядины — 15 рублей за килограмм. Сколько костей в килограмме говядины?

122. Золото и серебро. Если в сплав золота и серебра добавить 3 кг золота, то процентное содержание золота в сплаве увеличится вдвое. Если же к исходной смеси добавить 3 кг серебра, то процентное содержание золота уменьшится вдвое. Чего в исходном сплаве больше: золота или серебра — и во сколько раз?

123. Из иллюминатора самолёта видны часть острова, часть облака и немного моря. Облако занимает половину пейзажа, видимого из иллюминатора, и скрывает тем самым четверть острова, который поэтому занимает только четверть наблюдаемого пейзажа. Какую долю пейзажа составляет часть моря, скрытая облаком?

124. Самогонщики. В фильме «Самогонщики» три друга гонят самогон. У Труса течёт жидкость крепостью $a\,\%$ и стандартная бутыль наполняется за a часов, у Балбеса течёт жидкость крепостью $b\,\%$ и такая же бутыль наполняется за b часов, а у Бывалого — $c\,\%$ за c часов соответственно. Для ускорения процесса друзья направили трубки аппаратов в одну бутыль и наполнили её за сутки. Найдите крепость получившейся смеси.

Задачи на движение

125. Два друга Ваня и Федя вышли навстречу друг другу с постоянной скоростью. Ваня вышел в 10 часов из деревни Ванино и пришёл в деревню Федино в 15 часов. Федя вышел из деревни Федино в 11 часов и пришёл в Ванино в 16 часов. В какое время они встретились?

126. Однажды утром в 9.00 из деревни Федино в деревню Екатериновка вышел пешеход Федя. Одновременно навстречу ему из Екатериновки выехала велосипедистка Катя. Известно, что до момента встречи Федя успел пройти треть пути между деревнями, однако если бы Федя вышел на час раньше, то успел бы пройти до встречи половину пути. В какое время Федя и Катя встретились?

127. Волк гонится за Зайцем. Если бы Заяц стоял на месте, то Волк добежал бы до него за 4 минуты. Чтобы добежать до своего домика, Зайцу нужно 6 минут. Волк бегает в два раза быстрее Зайца. Догонит ли Волк Зайца?

128. Автомобиль и велосипедист выехали одновременно из пункта A в пункт B. Проехав треть пути, велосипедист остановился и тронулся лишь тогда, когда автомобилю осталось проехать треть пути до B. Автомобиль, доехав до B, без остановки поехал обратно в A. Кто приедет раньше: автомобиль в A или велосипедист в B?

129. Три автомобиля. Из города в одном направлении выехало три автомобиля: второй — через 10 минут после первого, третий — через 20 минут после второго. Через 30 минут после своего выезда третий автомобиль догнал второй, а ещё через 10 минут — первый. Через какое время после своего выезда из города второй автомобиль догнал первый?

130. Погоня. Львёнок решил покататься на Большой Черепахе, но сначала ему нужно её догнать. Какое расстояние придётся пробежать Львёнку, прежде чем он сможет покататься, если его скорость в 10 раз больше скорости Черепахи, а Черепаха находится в 180 метрах от Львёнка?

131. Среднее, но не арифметическое. Дима шёл некоторое время со скоростью 4 км/ч, а потом ещё столько же времени бежал со скоростью 8 км/ч. Какова его средняя скорость?

132. То же, но иначе. Коля прошёл некоторое расстояние со скоростью 4 км/ч, а потом такое же расстояние бежал со скоростью 8 км/ч. Какова его средняя скорость?

133. Ситуация на дороге. Расстояние по шоссе от пункта A до пункта B кратно 5 км. Автобус едет от A до B со скоростью 60 км/ч. Через каждые 5 км он делает остановку на 5 мин. Велосипедист проехал от A до B с постоянной скоростью за 1 час. В пути его обогнал автобус, потом он проехал мимо этого автобуса, стоящего на остановке, потом автобус снова его обогнал, и больше он с этим автобусом не встречался. Потратил ли автобус на путь из A в B больше 45 минут или меньше?

134. Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся в одну сторону с постоянными скоростями.

В тот момент, когда пешеход и велосипедист находились в одной точке, мотоциклист был в 6 км позади них. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отставал от них на 3 км. На сколько километров велосипедист обгонял пешехода в тот момент, когда пешехода догнал мотоциклист?

135. Кот Матроскин и почтальон Печкин были в гостях у дяди Фёдора и теперь возвращаются в Простоквашино. Им надо преодолеть расстояние 10 км, на двоих у них имеется один велосипед, на котором может ехать кто-то один. Ради справедливости они решили так: один из них едет на велосипеде, через какое-то время слезает, ставит велосипед у дерева и продолжает путь пешком. Второй доходит до велосипеда и садится на него, затем они меняются и так далее. Известно, что на велосипеде они могут ехать со скоростью 10 км/ч, пешком Печкин ходит со скоростью 4 км/ч, а Матроскин — 5 км/ч. За какое время они смогут вернуться домой?

136. Три брата Иван, Пётр и Николай возвращались домой с рыбалки, где их ожидал бочонок кваса. Иван шёл вдвое медленнее Петра и втрое медленнее Николая. Николай пришёл домой первым, принялся за квас и к приходу Петра выпил седьмую часть бочонка. Затем пришёл Пётр, и они стали пить квас уже вдвоём. Известно, что братья пьют квас с одинаковой скоростью. Хватит ли кваса третьему брату?

Туда и обратно

137. Из города A в город B катер плывёт 3 дня, а обратно — 5 дней. Сколько будут плыть плоты из A в B?

138. Далёкое путешествие. Имея полный бак топлива, катер может проплыть 72 км против течения и

120 км по течению. На какое наибольшее расстояние он может отплыть при условии, что топлива должно хватить и на обратный путь?

139. Два пловца одновременно прыгнули с плота и поплыли в разные стороны: один — по течению, а второй — против. Через 5 минут они одновременно повернули и поплыли обратно. Кто из пловцов доплывёт до плота быстрее?

140. Старинная задача. Ротная колонна движется по направлению к штабу со скоростью 6 км/ч. В 9.00 командир роты отправил почтового голубя с донесением в штаб. Голубь доставил донесение, сразу полетел обратно и вернулся в колонну. В какое время голубь долетел до штаба, если его скорость — 10 км/ч, а вернулся он в 9.45?

141. Вася и Коля плавают в бассейне по соседним дорожкам. Стартуют они одновременно с противоположных концов бассейна, «встречаются» и плывут дальше. Доплыв до конца дорожки, они мгновенно разворачиваются, опять «встречаются» и так далее. Вася проплывает дорожку за 5 минут, а Коля — за 7 минут. Через какое время после старта Вася впервые догонит Колю, плывя с ним в одном направлении?

По кругу

142. Волк, Медведь, Заяц и Лиса соревновались в беге по кольцевой трассе. Они стартовали одновременно, бежали с постоянными скоростями и через некоторое время вновь поравнялись друг с другом. Известно, что до этого момента Заяц обогнал Лису один раз, Лиса обогнала Волка три раза, Волк обогнал Медведя два раза. Сколько раз до этого момента Заяц обогнал Медведя?

Эскалатор метро

143. Кто успеет раньше? Петя и Витя ехали вниз по эскалатору. Посередине эскалатора Витя сорвал с Пети шапку и бросил её на встречный эскалатор. Петя побежал вверх, чтобы затем спуститься вниз и вернуть шапку. Витя побежал вниз, чтобы затем подняться вверх и успеть раньше Пети. Кто успеет раньше, если скорости ребят постоянны и равны?

144. Ступеньки. Лёня и Паша решили узнать количество ступенек эскалатора, находящихся между входом и выходом с него. Для этого они одновременно ступили на эскалатор, причём в то время, как Паша делал 2 шага, Лёня делал 1 шаг, а ступеньки никто не перескакивал. Оказалось, что они сделали 21 и 28 шагов соответственно. Какова длина эскалатора?

Непрерывные процессы

145. «Треугольная» сетка сделана из шнура, который может гореть (см. рис. 1). Огонь распространяется по шнуру с одной и той же скоростью по всем направлениям, причём каждое звено сгорает ровно за 1 минуту. Шнур подожгли в точке O. Какое из звеньев: AB, BC, CD, DE или AF — сгорит последним? За какое время?

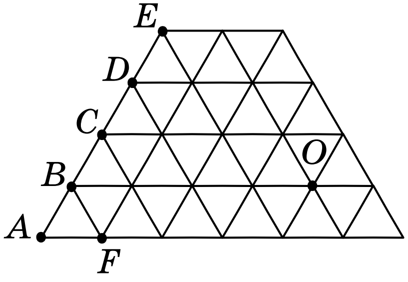


Рис. 1

146. Показания часов в настоящий момент: 7 часов 50 минут, 7 часов 53 минуты, 8 часов 6 минут, но все они показывают неправильное время. Известно, что какие-то из них «ошибаются» на 4 минуты, какие-то на 7 минут, а какие-то на 9 минут. Определите правильное время.

147. Юра и Саша должны встретиться в 8 часов утра. Юра думает, что его часы спешат на 25 минут, хотя в действительности они отстают на 10 минут. Саша думает, что его часы отстают на 10 минут, хотя на самом деле они спешат на 5 минут.

В какое время каждый из друзей будет на месте встречи, если они будут стремиться прийти за 5 минут до назначенного срока?

148. Часы и математика. Часовому мастеру принесли трое часов и попросили выверить их ход. Мастер включил секундомер и посмотрел на часы № 1 и № 2. За 11 минут хода часов № 1 часы № 2 отсчитали 10 минут. Потом он сравнил часы № 2 и № 3: за 12,5 минуты хода часов № 2 часы № 3 прошли 12 минут. Посмотрев затем в течение 8 минут 15 секунд на часы № 1, мастер остановил секундомер и впервые взглянул на него — он отсчитал ровно 30 минут. Определите, какие часы идут точно.

Совместная работа

149. Малыш может съесть банку варенья за 6 минут, а Карлсон — в два раза быстрее. За какое время они съедят это варенье вместе?

150. Три землекопа Иван, Пётр и Андрей взялись вырыть котлован. Если не придёт Иван, то двое сделают работу за 30 дней, если не придёт Пётр — то за 15 дней, а если не придёт Андрей — то за 12 дней. Вышел на работу один Андрей. За сколько дней он управится?

151. Поливка огорода. Сразу после завтрака (в 8.00) папа и сын выходят за водой и начинают наполнять пустой бак. Папа приносит ведро через каждые 3 минуты, а сын через каждые 4 минуты. Как только вода попадает в бак, включается насос, который забирает воду для полива с постоянной скоростью 1 ведро за 12 минут. Укажите время, когда в баке впервые окажется ровно 13 ведер воды.

152. Новая поливка огорода. В полдень папа и сын начинают наполнять водой пустой бак. Бак вмещает 16 больших вёдер или 20 маленьких вёдер воды. Папа приносит большое ведро каждые 4 минуты, а сын — маленькое ведро каждые 6 минут. После того как в бак попадает вода, включается насос, откачивающий из него воду для полива. Насос опорожняет бак за 80 минут. Через какое время после начала работы будет наполнена половина бака, если скорость работы насоса постоянна?

Измерение температуры

153. Цельсий и Фаренгейт. Температуру можно измерять в градусах Цельсия и Фаренгейта. Известно, что вода замерзает при $0\,^\circ\mathrm{C}$, что соответствует $32\,^\circ\mathrm{F}$, а кипит при $100\,^\circ\mathrm{C}$, или при $212\,^\circ\mathrm{F}$. Сейчас на улице 5 градусов мороза по Цельсию. Какова температура по Фаренгейту?

Календарные задачи

154. В некотором феврале было 5 воскресений. Какого числа было третье воскресенье февраля?

155. В некотором месяце понедельников больше, чем вторников, а воскресений больше, чем суббот. Какой день недели был пятого числа этого месяца? Мог ли этот месяц быть февралём?

156. Необычный год. «Я родился в необычный год, — сказал Вася. — Год был високосный, и в нём три пятницы выпали на 13-е число».

— Когда у тебя день рождения? — спросил Федя.

— Первого апреля — ответил Вася.

Мог ли день рождения Васи быть в пятницу?

157. В начале XXI века. Наш друг Дмитрий Николаевич — большой любитель занимательных задач. Как-то раз в январе 2010 года в компании его спросили, когда у него день рождения. Вот что он ответил: «Мне не более тридцати лет, и родился я в среду не менее 20 лет назад. Была осень. При этом сред, четвергов и пятниц (включая мой день рождения) до конца месяца оставалось девять, а сумма их дат равнялась 207». Поразмыслив, я смог определить дату рождения моего друга. Определите и вы. Ответ объясните.

158. Архив календарей. Известно, что календари на некоторые годы одинаковы (в них совпадают и числа, и дни недели). Сколько различных календарей нужно иметь в архиве, чтобы не покупать новых в течение всего XXI века?

Рубли и копейки

159. В универмаге. Саша купил в универмаге товаров на 127 рублей. Хотя у Саши были только пятирублёвые монеты, а у кассира только двухрублёвые, Саша сумел заплатить за товар и получить сдачу. Каково наименьшее количество монет, которое могло быть у Саши?

160. Какова прибыль? Коробейник продаёт в электричке шариковые ручки. Он предлагает покупателям либо одну ручку за 5 рублей, либо три ручки за 10 рублей. От каждого покупателя он получает одинаковую прибыль. Какую?

161. Рубли и копейки. У Пети были монеты достоинством в 1 рубль и 1 копейку, причём копеек было меньше чем на рубль. Покупая продукты, Петя потратил половину всей суммы. После этого у него снова оказались только рубли и копейки, причём копеек оказалось столько, сколько вначале было рублей, а рублей оказалось вдвое меньше, чем вначале было копеек. Сколько денег было у Пети первоначально?

162. Стоимость ножа. У двух братьев было стадо овец. Они продали его и за каждую овцу получили столько рублей, сколько голов было в стаде. Стали делить выручку: Петру — десятку, Ивану — десятку, Петру — десятку, Ивану — десятку и т. д. Наконец Пётр взял последнюю десятку, а Ивану нескольких рублей до десятки не хватило. Тогда Пётр вынул из кармана нож и отдал брату в качестве компенсации за недостающую сумму денег. Сколько стоил нож?

Уравнения в целых числах

163. Найдите число. Если между цифрами некоторого двузначного числа вписать это же число, то полученное четырёхзначное число будет больше первоначального в 77 раз. Найдите это число.

164. Четырёхзначное число. Математик задумал четырёхзначное число, сложил его с числом, записанным теми же цифрами в обратном порядке, и в сумме получил 11 440. Найдите хотя бы одно число, обладающее этим свойством. Сколько таких чисел существует?

165. Квартирный вопрос. Вася на вопрос, каков номер его квартиры, ответил так: «Если все шесть двузначных чисел, которые можно образовать из цифр номера, сложить, то половина полученной суммы составит как раз номер моей квартиры». Какой номер у квартиры, в которой живёт Вася?

166. Грузовик вмещает x кг груза. Известно, что его можно заполнить ровно 109 способами упаковками помидоров по 3 кг и 5 кг. Чему равно x?

167. Спрятанный день рождения. Вы хотите знать дату моего рождения? Ну что ж, попытайтесь угадать. Вот вам число: 405. Это число представляет собой сумму $12x+31y$, где x — число, а y — номер месяца, когда я родился. Какова дата моего рождения?

168. В шахматном турнире участвовали учащиеся 10 класса и два девятиклассника. Каждый участник турнира сыграл с остальными по одной партии. Два девятиклассника набрали вместе 3,5 очков, а все десятиклассники набрали очков поровну. Сколько десятиклассников участвовало в турнире? За выигрыш в партии в шахматах присуждают 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков.

169. Шесть, девять и тринадцать. Вася написал на доске некоторое число x и умножил каждое из чисел 6, 9 и 13 на x, после чего обнаружил, что в записи чисел $6x$, $9x$ и $13x$ каждая из десяти цифр встречается ровно один раз. Какое число написал Вася?

170. Когда начнётся сеанс? Школьник хочет пойти в кино. Он знает, что первый сеанс начинается между 12 и 13 часами, а второй — между 13 и 14 часами. Последний сеанс начинается в 23 часа 05 минут.

Промежутки времени между началом любых двух последовательных сеансов одинаковы. Когда начинается предпоследний, шестой сеанс?

171. Странное уравнение. Пусть запись $a \oplus b$ обозначает наибольшее из чисел $2a$ или $a+b$. Решите уравнение

$$x \oplus 1999 = 2001 \oplus x.$$

Разные задачи

172. В трёх ящиках лежат орехи. В первом на 6 орехов меньше, чем в двух других вместе, а во втором — на 10 меньше, чем в первом и третьем. Сколько орехов в третьем ящике?

173. Волшебное число. Федя разделил некоторое число на 4 и прибавил к нему 15, а Коля умножил это же число на 4 и отнял 15, но ответ тем не менее у них получился одинаковый. Что это было за число?

174. Апельсины и лимоны. Апельсин стоит 278 рублей, а лимон — 455 рублей. Куплено 10 фруктов общей стоимостью 3842 рубля. Сколько было куплено апельсинов?

175. Карандаши и ластики. Коля заплатил 12 копеек за 1 тетрадь, 2 карандаша и 1 ластик. Саша — 27 копеек за 2 тетради, 3 карандаша и 3 ластика. Сколько заплатил Антон за 2 тетради, 5 карандашей и 1 ластик?

176. Три брата получили 24 яблока, причём каждому досталось столько яблок, сколько ему было лет. Младший брат, который получил меньше всех яблок, остался недоволен и предложил братьям следующее: «Я оставлю себе только половину своих яблок, а остальные разделю между вами поровну, а затем пусть сначала средний, а потом и старший брат поступят так же, как и я». Братья, не подумав, согласились... и прогадали: яблок в результате у всех оказалось поровну. Сколько лет каждому брату?

177. В коробке лежат 20 шариков: красные, синие, жёлтые. Красных шариков на 6 меньше, чем синих и жёлтых вместе, жёлтых — на 10 меньше, чем синих и красных вместе. Какое наименьшее количество шариков надо достать из коробки, чтобы среди них обязательно оказалось 3 шарика разного цвета?

178. В мешке лежат золотые монеты: дублоны, дукаты и пиастры, одинаковые на ощупь. Если из мешка вынуть 10 монет, то среди них обязательно окажется хотя бы один дублон, если вынуть 9 монет — окажется хотя бы один дукат, если же вынуть 8 монет — хотя бы один пиастр. Какое наибольшее количество монет могло быть в мешке?

179. Где-то на Диком Западе. Три золотоискателя нашли 10 самородков общим весом 400 г. Они рассчитывали разделить находку так, чтобы каждому досталось не менее 100 г золота, однако, после того как один из самородков весом в 60 г пришлось отдать за продовольствие, такой раздел стал невозможен.

Мог ли он быть возможен вначале или золотоискатели заведомо ошибались?

180. Четыре друга: Андрей, Женя, Толя и Федя — играли в теннис пара на пару. После каждой партии они разбивались на пары заново. Известно, что Женя выиграл 27 раз, Андрей — 14 раз, Толя — 7 раз, а Федя — меньше всех. Ответьте на вопросы. а) Сколько партий выиграл Федя? б) Сколько партий он проиграл?

181. Дороги в дамки. На каждом из четырёх отмеченных полей стоит по шашке (см. рис. 2). Шашка, как известно, стремится «в дамки». Какая из них может проделать этот путь на пустой доске наибольшим числом способов?

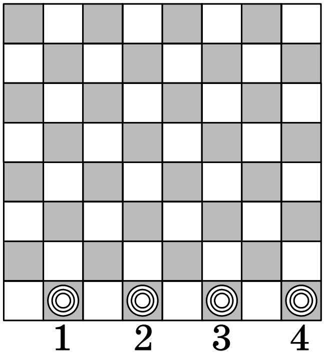


Рис. 2

Ответы, комментарии, решения

98. Ответ: 200 животных.

Пусть каждый двугорбый верблюд «поделится» горбом с лошадью (у которой горба нет). Тогда у каждого животного будет по одному горбу, а количество горбов будет равно количеству животных в стаде.

99. Ответ: 80 человек.

Так как запас воды не изменился, а время, на которое хватит имевшегося, — 3 недели, число членов экипажа увеличилось на одну треть. Таким образом, экипаж корабля капитана Флинта (вместе с пополнением) составил 80 человек.

100. Ответ: на второй ферме получают молока меньше на $5{,}5\,\%$.

Пусть число коров на первой ферме a, а удой каждой коровы b. Тогда число коров на второй ферме $0{,}875a$, а удой каждой из них $1{,}08b$. На первой ферме получают молока ab, а на второй — $0{,}945ab$, что составляет $94{,}5\%$ от ab.

101. Ответ: 420 женщин и 480 мужчин.

Предположим, что за кандидата A проголосовали $20\,\%$ мужчин и $20\,\%$ женщин, то есть $20\,\%$ жителей села, участвовавших в выборах. В этом случае число проголосовавших за кандидата A составило бы $900 \cdot 0{,}2 = 180$ жителей, то есть на 21 больше, чем в действительности. Этот избыток соответствует $5\,\%$ женщин, добавленным к фактически проголосовавшим $15\,\%$. Следовательно, голосовало $21 : 0{,}05 = 420$ женщин и $900 - 420 = 480$ мужчин.

102. Ответ: $\dfrac{12}{19}$.

Пусть число супружеских пар в деревне равно N. Заполним таблицу.

	Состоит в браке	Всего
Мужчин (чел.)	N	$\frac{3}{2}N$
Женщин (чел.)	N	$\frac{5}{3}N$
Итого	$2N$	$\frac{5}{3}N+\frac{3}{2}N=\frac{19}{6}N$

Тогда доля людей, состоящих в браке, равна

$$2N : \frac{19}{6}N = \frac{12}{19}.$$

103. Ответ: $17\frac{7}{9}\,\%$.

Пусть x — количество супружеских пар. Тогда $2x$ мужчин и женщин состоят в браке, $3x$ мужчин не женаты и $4x$ женщин не замужем, всего взрослых — $9x$, что составляет $80\,\%$ населения.

Доля людей, состоящих в браке, равна

$$\frac{2}{9}\cdot 80\,\% = 17\frac{7}{9}\,\%.$$

104. Ответ: 10 бананов.

Определим, сколько бананов съела Мартышка на обед. Из условия следует, что вес всех бананов, съеденных Мартышкой на обед, составляет

$$1-\left(\frac{7}{20}+\frac{1}{4}\right)=\frac{8}{20}$$

общего веса. Следовательно, количество бананов, съеденных на обед, должно быть больше 3 (так как $\frac{8}{20} > \frac{7}{20}$).

Отложим в сторону три самых лёгких банана и выберём самый лёгкий из оставшихся. Его вес будет не меньше $\frac{1}{12}$ общего веса (иначе три самых лёгких банана составят менее $\frac{1}{4}$ общего веса).

Количество бананов, съеденных на обед, должно быть меньше 5 (так как $\frac{2}{5} : \frac{1}{12} < 5$), то есть на обед Мартышка съела 4 банана, а всего она съела 10 бананов.

105. Ответ: поровну.

Пусть у Лизы a двоек, тогда у Феди — $1{,}1a$ двоек. После исправления у Лизы стало $0{,}99a$ двоек, у Феди — $1{,}1a \cdot 0{,}9 = 0{,}99a$.

106. Ответ: $55\,\%$.

Если бы всем членам семьи вдруг стали платить вдвое больше, общий доход увеличился бы на $100\,\%$. Из этого увеличения $5\,\%$ пришлось бы на Машу, $15\,\%$ — на маму, $25\,\%$ — на папу, а остальные $55\,\%$ — на дедушку.

107. Ответ: выгоднее начислять проценты раз в месяц.

В чём причина? Дело в том, что в этом случае начиная со второго месяца $1\,\%$ берётся от новой (большей) суммы.

108. Ответ: верно.

Из того, что $2\,\%$ числа a больше, чем $3\,\%$ числа b, следует, что $4\,\%$ числа a больше, чем $6\,\%$ числа b, и $1\,\%$ числа a больше, чем $1\,\%$ числа b.

«Сложив» эти два утверждения, получим, что $5\,\%$ числа a больше, чем $7\,\%$ числа b.

109. Ответ: могла, например, для чисел 100 и 100.

Пусть первое число равно $100x$, а второе — $100y$. Сформулируем задачу иначе: «найти, при каких положительных x и y будет выполнено равенство

$101x + 105y = 103(x + y)$ ». Находим, что $2y = 2x$. При $x = y = 1$ получим числа 100 и 100, которые будут удовлетворять условию задачи.

110. Ответ: уменьшить на 40%.

Пусть числитель дроби равен m, а знаменатель равен n, тогда числитель новой дроби равен $1{,}2m$, а знаменатель равен xn. Кроме того, выполнено равенство

$$\frac{1{,}2m}{xn} = 2 \cdot \frac{m}{n}.$$

Следовательно, $2x = 1{,}2$, а $x = 0{,}6$, тогда знаменатель дроби следует уменьшить на $40\ \%$.

111. Ответ: баран весит 121 кг.

Пусть баран весит x кг, а всего в отаре n голов. Заполним таблицу.

	Вес животного (кг)	Количество голов	Общий вес (кг)
Бараны	x	$0{,}45n$	$0{,}45nx$
Овцы	81	$0{,}55n$	$0{,}55n \cdot 81$

Получим пропорцию:

$$\frac{0{,}45nx}{0{,}55n \cdot 81} = \frac{55}{45}, \text{ откуда } \frac{9x}{11 \cdot 81} = \frac{11}{9} \text{ и } x = 121.$$

112. Ответ: у Карлсона было в 3 раза больше конфет, чем у Малыша.

Первое решение. Заметим, что $80\ \%$ конфет, имевшихся у Малыша, составляют $20\ \%$ общего количества конфет. Следовательно, $100\ \%$ конфет, имевшихся у Малыша, составляют $25\ \%$ общего количества конфет. Остальные $75\ \%$ общего количества конфет — конфеты Карлсона. Следовательно, у Карлсона было в 3 раза больше конфет, чем у Малыша.

Второе решение. Задачу можно решить, составив уравнение $0{,}2x + y = 0{,}8(x + y)$, где x — количество конфет Малыша, а y — количество конфет Карлсона.

113. Ответ: Обломов похудел.

Пусть вес Обломова сперва был a кг, тогда через год его вес будет равен $a \cdot 0{,}75 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}9 \cdot 1{,}2 = 0{,}972a < a$.

114. Ответ: 23 человека.

Две девочки составляют менее $9\,\%$ участников кружка, так что $1\,\%$ составляет более чем $\frac{2}{9}$ человека, а $100\,\%$ — более $\frac{200}{9}$, то есть не менее 23 человек.

115. Ответ: 435 партий; 24 шахматиста.

Каждый участник турнира сыграл 29 партий. Всего сыграно $(30 \cdot 29) : 2$ (каждую партию играют двое). Следовательно, будет сыграно 435 партий (и разыграно 435 очков).

Чтобы выполнить норму IV разряда, надо набрать 17,5 очков.

Число участников, ставших разрядниками, не может быть больше чем $435 : 17{,}5$, что меньше 25.

Если 24 участника все партии между собой закончат вничью, а остальные партии выиграют, то они наберут требуемые 17,5 очков.

116. Ответ: 4320 елей.

Пусть x — количество пихт. Тогда сосен — $x + 144$, а елей — $1{,}25x$. С другой стороны, так как елей на $20\,\%$ больше, чем сосен, количество елей — $1{,}2 \cdot (x + 144)$. Составим уравнение:

$$1{,}2 \cdot (x + 144) = 1{,}25x.$$

Получим, что $x = 3456$. Следовательно, количество елей равно $3456 \cdot 1{,}25 = 4320$.

117. Ответ: 20 шариков.

Заметим, что после того, как убрали синий и зелёный шарики, количество красных не изменилось и сравнялось с количеством остальных. Это означает, что количество шариков у Пятачка уменьшилось на 10 % (если 45 % — половина, то 90 % — все оставшиеся!). Таким образом, 2 шарика составляют 10 % от числа подаренных шариков, и всего ему подарили 20 шариков.

118. Ответ: нельзя.

Если слить содержимое обеих банок в одну, то получим раствор с концентрацией спирта 50 %, значит, чтобы получить раствор с концентрацией спирта 54 % в пятилитровой банке, мы должны что-то оставить в трёхлитровой банке.

Предположим, что мы добились желаемого результата. Тогда мы должны были переливать раствор, в котором спирта больше, чем воды. Значит, в трёхлитровой банке раствор остался с преобладанием спирта. Тогда в обоих сосудах содержится раствор с концентрацией спирта более 50 %. Это невозможно, так как количество воды и спирта одинаково.

119. Ответ: 60 кг.

Согласно условию задачи в 40 кг морской воды содержится 5 % соли (одна двадцатая часть), то есть 2 кг. В новом растворе 2 кг соли составят 2 % (одну пятидесятую часть).

120. Ответ: вес уменьшился в 2 раза.

Если вес свежих грибов $100x$, то вес сухого вещества в них x. После подсушивания вес сухого вещества не изменился, но стал составлять 2 % (одну пятидесятую) от веса грибов. Следовательно, вес сушёных грибов — $50x$.

121. Ответ: 160 г.

Пусть в килограмме говядины x кг костей, тогда «чистой» говядины в нём — $(1-x)$ кг. Таким образом, стоимость костей составляет $15x$ руб., а стоимость «чистой» говядины — $90(1-x)$ руб. Составим уравнение: $15x+90(1-x)=78$, откуда получим, что $x=0{,}16$.

122. Ответ: серебра больше в 2 раза.

Пусть исходный сплав состоит из x кг золота и y кг серебра.

Составим два уравнения.

1. Если добавлено 3 кг золота, то

$$\frac{x+3}{x+y+3}=2\cdot\frac{x}{x+y}.$$

2. Если добавлено 3 кг серебра, то

$$\frac{x}{x+y+3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x+y}.$$

Указание. Из второго уравнения получим, что $x+y=3$, подставим в первое уравнение и найдём x.

123. Ответ: $\frac{5}{12}$.

Три четверти острова занимают четверть пейзажа, который виден в иллюминатор. Следовательно, весь остров составляет одну треть, а море — две трети видимого пейзажа. Получается, что часть моря, не закрытая облаком, составляет одну четверть видимого пейзажа.

Следовательно, доля моря, скрытая облаками, равна

$$\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{5}{12}.$$

124. Ответ: $72\,\%$.

Разделим мысленно бутыль на 100 частей («стаканов») и последим за количеством спирта в ней. В полной бутыли крепости $a\,\%$ содержится a «стаканов», следовательно, аппарат Труса вырабатывает один «стакан» спирта в час. То же верно и для двух других аппаратов. За 24 часа три аппарата выработают 72 «стакана» спирта, а крепость смеси будет равна $72\,\%$.

125. Ответ: в 13 часов.

Скорости Вани и Феди одинаковы. Ваня, выйдя в 10.00, за первый час прошёл одну пятую пути. Когда в 11.00 ему навстречу вышел Федя, расстояние между ними составляло $\frac{4}{5}$ расстояния от Ванино до Федино, следовательно, они встретятся через 2 часа.

126. Ответ: в 10 часов 20 минут.

1. За одно и то же время (до встречи) Вася прошёл треть пути, а Катя проехала две трети пути, то есть в два раза больше, чем Федя.

Следовательно, скорость Кати в два раза больше, чем скорость Феди.

2. Половину пути Федя проходит на 1 час дольше, чем Катя, а весь путь — на 2 часа дольше. Следовательно, на весь путь Федя потратит 4 часа, а Катя — 2 часа.

3. Треть пути Федя пройдёт за $\frac{4}{3}$ часа. Следовательно, время их встречи — 10 часов 20 минут.

Задачу можно решить и путем составления уравнения.

127. Ответ: Волк не догонит Зайца.

Волку, для того чтобы добежать до дома, требуется 7 минут (4 минуты до того места, где стоял Заяц, и

3 минуты до его дома), а Зайцу надо 6 минут (см. рис. 3).

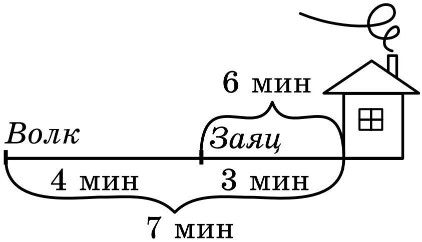


Рис. 3

128. Ответ: велосипедист приедет раньше.

Заметим что: 1) велосипедист проехал треть пути быстрее, чем автомобиль две трети, следовательно, его скорость составляет более половины скорости автомобиля; 2) после того как велосипедист тронулся в путь, ему осталось проехать две трети расстояния от A до B, а автомобилю — четыре трети.

129. Ответ: через 200 минут.

1. Так как третий автомобиль выехал через 20 минут после второго, а догнал его ещё через 30 минут, за 30 минут он проезжает столько же, сколько второй за 50 минут.

Следовательно, за 120 минут он проезжает столько же, сколько второй за 200 минут.

2. Так как третий автомобиль выехал через 30 минут после первого, а догнал его ещё через 40 минут, за 40 минут он проезжает столько же, сколько первый за 70 минут.

Следовательно, за 120 минут он проезжает столько же, сколько первый за 210 минут.

3. Второй автомобиль выехал через 10 минут после первого, следовательно, второй автомобиль догнал первый через 200 минут после своего выезда из города.

130. Ответ: 200 м.

За то время, пока Львёнок пробежит 200 м, Черепаха отползёт на 20 м и окажется в 200 м от его начального положения.

131. Ответ: 6 км/ч.

Пусть Дима был в пути $2t$ часов, тогда он преодолел $12t$ км. Следовательно, его средняя скорость равна 6 км/ч.

132. Ответ: $5\frac{1}{3}$ км/ч.

Пусть Коля сначала шёл $8s$ км со скоростью 4 км/час, а потом бежал $8s$ км со скоростью 8 км/час. Следовательно, он прошёл расстояние $16s$ км за $3s$ часов. Поэтому его средняя скорость равна

$$\frac{16s}{3s} = 5\frac{1}{3} \text{ км/ч}.$$

133. Ответ: автобус тратит на путь из A в B не больше 45 минут.

Пусть M — остановка, на которой велосипедист объехал автобус, L — предыдущая остановка (возможно, это пункт A), N — следующая (возможно, это B). Если L — это A и в то же время N — это B, то автобус тратит на всю поездку 15 минут.

Пусть L не совпадает с A. Когда автобус подъехал к остановке L, велосипедист уже проехал мимо неё, и автобус обогнал велосипедиста, не доезжая до остановки N. Значит, велосипедист на отрезке LN затратил больше 20 минут (так как автобус в это же время стоял два раза по 5 минут и проехал больше 10 км). Следовательно, скорость велосипедиста меньше 30 км/ч. Из этого следует, что расстояние

AB меньше 30 км. Так как оно кратно 5 км, оно может быть равно самое большее 25 км. В этом случае автобус проедет весь путь за 45 минут (будет стоять на 4 остановках по 5 минут и ехать пять отрезков по 5 минут).

Аналогично разбирается случай, когда N не совпадает с B.

134. Ответ: на 2 км.

Мотоциклист вначале отставал от пешехода на 6 км, а потом опередил на 3 км. Велосипедист вначале находился вровень с пешеходом, а потом опередил его на 3 км.

Получается, что скорость мотоциклиста относительно пешехода в 3 раза больше скорости велосипедиста относительно пешехода.

Мотоциклист, догоняя пешехода, проехал на 6 км больше него, тогда как велосипедист обогнал пешехода на расстояние в три раза меньше, то есть на 2 км.

135. Ответ: за 1 час 36 минут.

Независимо от того, как часто и сколько раз друзья меняли свой способ передвижения, ясно, что Матроскину пришлось пройти пешком тот путь, который Печкин проехал, и наоборот.

Предположим, что кот прошёл x км, тогда на велосипеде он проехал $10 - x$ км. В этом случае почтальон прошёл $10 - x$ км, а проехал x км.

Если оба прибыли домой одновременно, то

$$\frac{x}{5} + \frac{10 - x}{10} = \frac{10 - x}{4} + \frac{x}{10}$$

Решив уравнение, находим, что $x = 6$.

Если бы они прибыли домой не одновременно, то их общий результат можно было бы улучшить, отдав велосипед отстающему партнёру чуть раньше.

Итак, Матроскин прошёл пешком 6 км, а проехал на велосипеде 4 км. Нетрудно рассчитать, что вся дорога в Простоквашино заняла 1,6 ч, то есть 1 час 36 минут.

136. Ответ: Ивану кваса не хватит.

Иван шёл вдвое медленнее Петра и втрое медленнее Николая. Следовательно, Иван потратил на дорогу вдвое больше времени, чем Пётр, и втрое больше времени, чем Николай.

Пусть Иван, Пётр и Николай потратили на дорогу $6t$, $3t$ и $2t$ часов соответственно. Тогда получается, что Николай пил квас в одиночку t часов, а вместе с Петром $3t$ часов. Николай выпил в одиночку одну седьмую часть бочонка кваса, а вместе с Петром — шесть седьмых бочонка, то есть к приходу Ивана кваса не осталось.

137. Ответ: 15 дней.

По течению катер проплывает за день треть пути, а против течения пятую часть. Следовательно, за день плоты проплывут

$$\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right):2=\frac{1}{15}\text{ часть пути.}$$

138. Ответ: 45 км или 72 км.

Возможно два понимания условия задачи!

1. Заметим, что при движении против течения на 1 км пути требуется потратить $\frac{1}{72}$ бака топлива, а при движении по течению — $\frac{1}{120}$ бака. Пусть s км — мак-

симальное расстояние, на которое удаётся отплыть катеру, при условии, что топлива должно хватить и на обратный путь.

Тогда

$$\left(\frac{1}{120}+\frac{1}{72}\right)\cdot s=1, \text{ откуда } s=45.$$

2. Можно, не включая мотора, отплыть по течению реки на 72 км, а затем вернуться с включённым мотором.

139. Ответ: они доплывут одновременно.

Относительно плота пловец движется с постоянной скоростью независимо от того, плывёт ли он по течению реки или против течения. Следовательно, отплыв за 5 минут на некоторое расстояние, пловец вернётся обратно также за 5 минут.

140. Ответ: 9 часов 36 минут.

Первое решение. Если считать колонну неподвижной, то голубь сначала уходит вперёд со скоростью 4 км/ч, а потом возвращается обратно со скоростью 16 км/ч. Так как он возвращается со скоростью, в 4 раза большей, чем при удалении от колонны, времени тратится в 4 раза меньше — $\frac{1}{5}$ от общего времени отсутствия. Следовательно, на обратный путь тратится 9 минут. Тогда голубь прилетел в штаб в 9 часов 36 минут.

Второе решение. Представим движение голубя и колонны как движение из двух пунктов навстречу друг другу. При этом они находятся на равном расстоянии от штаба, то есть штаб располагается посередине.

Всё время в пути голубя и ротной колонны до их встречи — 45 минут, или три четверти часа. Скорость их сближения — 16 км/ч. Тогда весь путь между двумя пунктами составляет $16 \cdot 0{,}75 = 12$ км.

Так как штаб располагается посередине, расстояние до него составляет 6 км. Следовательно, голубь до штаба был в пути $6 : 10 = 0{,}6$ часа, или 36 минут, таким образом, голубь окажется в штабе в 9 часов 36 минут.

Третье решение. За 45 минут, или три четверти часа, голубь пролетел 7,5 км, а колонна прошла 4,5 км. Значит, удвоенное расстояние от старта голубя до штаба равно $7{,}5 + 4{,}5 = 12$ км, то есть от старта до штаба голубь пролетел 6 км. Со скоростью 10 км/ч он это сделал за 36 минут.

141. Ответ: через 17,5 минут.

Первое решение. Вася нагонит Колю, плывя с ним в одном направлении, когда разница в расстоянии, которое они проплыли, станет равна длине дорожки.

Разделим дорожку на 35 условных единиц длины. Тогда разница в скорости Васи и Коли составляет 2 единицы в минуту. Разница в 35 единиц будет покрыта через $35 : 2 = 17{,}5$ минут.

Второе решение. Составим уравнение:

$$\frac{l}{5}t = \frac{l}{7}t + l,$$

где l — длина дорожки, а t — время, через которое разница в «проплытом» расстоянии между ними станет равна длине дорожки. Получим $t = 17{,}5$ минут.

142. Ответ: 8 раз.

В момент, когда один догоняет другого в первый раз, он пробегает на круг больше. Когда догоняет второй раз — пробегает на два круга больше, а обгоняет только один раз. Когда догоняет в $(n+1)$-й раз — пробегает на $n+1$ круг больше, но обгоняет ровно n раз. Таким образом, если один из зверей догнал другого n раз, значит, он пробежал на $n+1$ круг больше.

Если Медведь пробежал x кругов, тогда Волк пробежал $x+3$ круга, а Лиса пробежала $x+3+4$ круга. Следовательно, Заяц пробежал $x+3+4+2$ кругов, то есть на 9 кругов больше, чем Медведь, а значит, обогнал его 8 раз.

143. Ответ: если собственная скорость мальчиков меньше удвоенной скорости эскалатора, то первым успеет Витя, если больше или равна, то они успеют одновременно.

Представим, что эскалаторы соединены своими концами и тем самым составят замкнутую ленту, тогда скорости приближения каждого из мальчиков к шапке равны, следовательно, ребята подбегут к шапке одновременно. Но это будет верно лишь в том случае, если шапка не успеет доехать до конца эскалатора! Это произойдёт, если скорость мальчиков больше или равна удвоенной скорости эскалатора.

Если же шапка остановится на площадке эскалатора, то она перестанет «приближаться» к Пете (и «удаляться» от Вити) и Витя успеет к ней раньше. Это произойдёт, если скорости мальчиков меньше удвоенной скорости эскалатора.

144. Ответ: 42 ступеньки.

Пусть эскалатор продвигается на x ступеней за то время, пока Лёня делает 1 шаг, а Паша 2 шага.

Тем самым, пока Лёня проходит 21 ступеньку, эскалатор проезжает $21x$ ступенек, что вместе равно длине эскалатора.

Аналогично, пока Паша проходит 28 ступенек, эскалатор проезжает $14x$ ступенек, что также составляет длину эскалатора.

Получим уравнение:

$$21 + 21x = 28 + 14x,$$

откуда находим, что $x = 1$, а длина эскалатора равна $21 + 21 \cdot 1 = 42$ ступеням.

145. Ответ: AB и AF — за 5 минут.

Огонь доберётся до любой из точек B, C, D, E, F за 4 минуты. Следовательно, последними сгорят отрезки AB и AF за 5 минут (отрезки DE, CD, BC сгорят за 4,5 минуты, потому что будут гореть с двух концов).

146. Ответ: правильное время — 7 часов 57 минут.

Разница в показаниях первых и третьих часов — 16 минут. Такое может быть, только если одни отличаются от правильного времени на 9, а другие — на 7 минут, причём в разные стороны. Значит, правильное время — либо 7 часов 57 минут, либо 7 часов 59 минут.

Время 7 часов 59 минут не годится, поскольку тогда часы, показывающие 7 часов 53 минуты, отличаются от правильного времени на 6 минут. Значит, правильное время — 7 часов 57 минут.

147. Ответ: Юра придёт в 8 часов 30 минут, Саша — в 7 часов 40 минут.

Юра и Саша хотят прийти за 5 минут до условленного времени, то есть в 7 часов 55 минут.

Так как Юра думает, что его часы спешат на 25 минут, он придёт на встречу, когда его часы будут показывать 8 часов 20 минут.

На самом же деле его часы опаздывают на 10 минут, следовательно, он придёт на встречу в 8 часов 30 минут.

Саша придёт, когда на его часах будет 7 часов 45 минут, — он думает, что они опаздывают на 10 минут, но на самом деле будет 7 часов 40 минут.

148. Ответ: правильно идут часы № 2.

Так как часы идут по-разному, у каждых своя «продолжительность минуты», то есть за минуту реального времени часы № 1 отсчитают m_1 минут, часы № 2 — m_2 минут, а часы № 3 — m_3 минут.

Из соотношений времени на часах № 1 и № 2 получаем

$$11m_1 = 10m_2 \text{ или } m_2 = 1{,}1m_1.$$

Из соотношений времени на часах № 2 и № 3 имеем

$$12{,}5m_2 = 12m_3.$$

Найдём «продолжительность минуты» на часах № 1. Прошло 30 минут: $11m_1 + 12{,}5m_2 + 8{,}25m_1 = 30$.

Заменив m_2 на $1{,}1m_1$, получим

$$11m_1 + 13{,}75m_1 + 8{,}25m_1 = 30, \text{ или } 11m_1 = 10.$$

Это означает что за 10 настоящих минут часы № 1 отсчитают 11 минут, а часы № 2 — 10, то есть часы № 2 идут верно, а часы № 1 спешат.

Часы № 3 не могут показывать точное время, так как идут медленнее часов № 2.

149. Ответ: за 2 минуты.

Карлсон съест банку варенья за время, которое понадобится двум Малышам, чтобы съесть такую же банку. Следовательно, три Малыша съедят банку варенья за две минуты.

150. Ответ: за 120 дней.

Пусть совместная работа продолжается 60 дней. За это время:

1) Пётр с Андреем выкопают 2 котлована;

2) Иван с Андреем — 4 котлована;

3) Иван с Петром — 5 котлованов.

Всего они выкопают не 11, а только 5,5 котлована, поскольку иначе вклад каждого будет посчитан дважды.

Вклад Андрея в работу — 0,5 котлована.

Следовательно, один котлован он выкопает за $60 : 0{,}5 = 120$ дней.

151. Ответ: 8.27 (или через 27 минут).

Через 24 минуты в баке будет $12\frac{1}{4}$ вёдер воды: папа принес 8 вёдер воды, сын — 6 вёдер воды, и за 21 минуту насос выкачал $1\frac{3}{4}$ ведра воды. За следующие три минуты из бака выльется $\frac{1}{4}$ ведра воды, а в конце 27-й минуты папа нальёт одно ведро и в баке впервые станет 13 вёдер воды.

152. Ответ: через 42 минуты.

Пусть в баке 80 условных единиц воды (назовём их «банками»). Тогда объём большого ведра — 5 «банок», а маленького — 4 «банки».

К концу 6-й минуты папа и сын принесут 9 «банок», а насос откачает 2 «банки» (насос начал работать по истечении 4 минут). Итого — 7 «банок».

Далее, каждые 12 минут прибавка будет составлять уже 11 «банок». Итого к концу 42-й минуты в баке будет 40 «банок» — ровно половина бака.

Докажем, что этого не могло быть раньше. Понятно, что каждый раз, когда папа наливает ведро, в баке достигается новый «рекорд» наполнения бака.

На исходе 40-й минуты папа вылил ведро и «рекорд» стал равен 38 банкам. На исходе 42-й минуты сын добавил 4 «банки», а насос откачал две.

153. Ответ: 23 °F.

Из условия следует, что изменение температуры на 100 °C соответствует изменению на 180 °F, то есть изменение на 1 °C равно изменению на 1,8 °F.

Поэтому −5 °C соответствуют

$$32\,°\mathrm{F} - 5 \cdot 1{,}8\,°\mathrm{F} = 23\,°\mathrm{F}.$$

154. Ответ: 15 февраля.

В неделе только одно воскресенье. Следовательно, в четырёх неделях будет 4 воскресенья. Так как воскресений 5, в этом феврале 29 дней, причём 1 февраля — воскресенье.

155. Ответ: четверг; месяц не мог быть февралём.

В первых 28 днях месяца все дни недели представлены одинаково. В условии дано, что воскресений больше, чем суббот, а понедельников больше, чем вторников, следовательно, среди «лишних» дней встречаются воскресенье и понедельник, а суббота и вторник нет. Значит, в месяце 30 дней, а начинается он с воскресенья.

156. Ответ: не мог.

Для ответа на вопрос задачи достаточно рассмотреть любой календарь високосного года, в котором 1 апреля является пятницей (например, 2016 год), и убедиться, что в нём лишь один раз 13-е число выпадает на пятницу.

157. Ответ: 15 октября 1986 года.

Все среды, четверги и пятницы, оставшиеся до конца месяца, образуют на листе календаря квадрат

3×3. Заметим, что если в центре этого квадрата стоит число x, то сумма чисел в квадрате равна $9x$.

Таким образом, в центре квадрата, про который говорит Дмитрий Николаевич, стоит число 23 ($207 : 9 = 23$). Центр квадрата — четверг. Следовательно, среда, в которую родился Дмитрий Николаевич, — 15-е число, а последняя пятница в этом месяце — 31-е число.

Также заметим, что среди осенних месяцев 31 день только в октябре. Теперь осталось найти год, удовлетворяющий условию задачи, в котором 31 октября — пятница. Это 1986 год. Следовательно, Дмитрий Николаевич родился 15 октября 1986 года.

158. Ответ: 14 календарей.

Необходимо 14 календарей: 7 обычных и 7 високосных лет.

159. Ответ: 27 монет.

Пусть у Саши x рублей, тогда $x - 127$ чётно. Следовательно, x — наименьшее нечётное число, кратное 5 и большее 127. Этому условию удовлетворяет число 135, то есть у Саши было 135 рублей — 27 монет.

160. Ответ: 2 руб. 50 коп.

Пусть себестоимость ручки x, тогда в первом случае прибыль с одного покупателя $5 - x$, а во втором — $10 - 3x$. Получим уравнение: $5 - x = 10 - 3x$, откуда находим $x = 2{,}5$.

161. Ответ: 99 руб. 98 коп.

Пусть у Пети осталось a руб. b коп., тогда перед походом в магазин у него было $2a$ руб. + $2b$ коп.

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $b < 50$, тогда $2b < 100$.

Из условия следует, что $b = 2a$ и $a = b$, что возможно только при $a = b = 0$.

2. Пусть $b \geq 50$, тогда $2b \geq 100$.

В этом случае один из рублей, который был у Пети вначале, оказался разменянным на копейки, поэтому $b = 2a + 1$ и $2a = 2b - 100$.

Добавим к обеим частям второго уравнения по 1, а затем заменим $2a + 1$ на b. Получим $b = 2b - 99$, откуда находим $b = 99$, $a = 49$. Следовательно, у Пети осталось 49 руб. 99 коп., а было 99 руб. 98 коп.

162. Ответ: 2 рубля.

Поскольку последнюю десятку получил Пётр, число десяток в выручке было нечётным. В каком случае это получается?

Заметим, что на чётность предпоследней цифры квадрата натурального числа влияет только последняя цифра этого числа. Перебором можно убедиться, что имеются только две «подходящие» цифры: 4 и 6, так как $4^2 = 16$ и $6^2 = 36$, а, например, цифра 5 не подходит, так как $5^2 = 25$.

В том и другом случае последняя цифра суммы выручки 6, а до 10 здесь не хватает 4. Значит, при дележе выручки Ивану не хватило 4 руб. до полной десятки, то есть стоимость ножа — 2 руб., ведь получается, что братья поделили выручку пополам и при этом Пётр лишился ножа, а Иван получил.

163. Ответ: 15.

Представим получившееся четырёхзначное число в виде $\overline{AABB}$. Тогда

$$11 \times \overline{A0B} = 77 \times \overline{AB},$$

откуда получим $\overline{A0B} = 7 \times \overline{AB}$.

Следовательно, $B = 0$ или $B = 5$.

Первый случай: $\overline{A00} = 7 \times \overline{A0}$. Это невозможно, так как $\overline{A0} = 7 \times \overline{A}$ и $A = 0$.

Второй случай: $\overline{A05} = 7 \times \overline{A5}$. Перебором убеждаемся, что $A = 1$.

164. Ответ: например, 1499; всего таких чисел 54.

Пусть математик сложил два «симметричных» четырёхзначных числа и получил 11 440:

$$\overline{abcd} + \overline{dcba} = 11440.$$

Так как

$$\overline{abcd} + \overline{dcba} =$$
$$= 1000a + 100b + 10c + d + 1000d + 100c + 10b + a =$$
$$= 1001(a + d) + 110(b + c) = 11 \cdot (7 \cdot 13 \cdot (a + d) + 10(b + c))$$

и $11440 = 11 \cdot 1040$, мы получаем

$$7 \cdot 13 \cdot (a + d) + 10 \cdot (b + c) = 13 \cdot 80. \qquad (1)$$

Так как слагаемое $7 \cdot 13 \cdot (a + d)$ и сумма $13 \cdot 80$ делятся на 13, а 10 не делится на 13, число $b + c$ делится на 13.

Случай $b = c = 0$ невозможен, так как $13 \cdot 80$ не делится на 7, поэтому $b + c = 13$.

Разделив на 13 равенство (1), получим

$$7 \cdot (a + d) + 10 = 80,$$

откуда следует, что $a + d = 10$.

Выпишем все числа $\overline{ad}$, удовлетворяющие условию $a + d = 10$: 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91 — их 9.

Выпишем все числа $\overline{bc}$, удовлетворяющие условию $b + c = 13$: 49, 58, 67, 76, 85, 94 — их 6.

Чтобы записать число, которое мог задумать математик, надо между цифрами числа $\overline{ad}$ вставить число $\overline{bc}$. Всего таких чисел $9 \cdot 6 = 54$.

165. Ответ: номер квартиры — 198.

Номер квартиры — трёхзначное число, состоящее из трёх разных цифр, так как:

1) сумма шести двузначных чисел — число не более чем трёхзначное;

2) если не все цифры различны, то из цифр этого числа нельзя образовать 6 различных чисел.

Пусть $\overline{abc}$ — номер квартиры Васи. Тогда сумма шести двузначных чисел будет равна

$$\overline{ab} + \overline{ba} + \overline{ac} + \overline{ca} + \overline{bc} + \overline{cb} = 22(a + b + c).$$

Следовательно, номер Васиной квартиры равен

$$11(a + b + c),$$

где a, b и c — различные цифры.

Далее, из уравнения

$$100a + 10b + c = 11a + 11b + 11c$$

получим $89a = b + 10c$. Заметим, что $b + 10c$ — двузначное число, так как b и c — цифры. Цифра a не может равняться 0, поскольку это первая цифра в трёхзначном номере.

Таким образом, $a = 1$, тогда $b = 9$ и $c = 8$. Следовательно, номер Васиной квартиры — 198.

166. Ответ: $x = 1620 + 5a + 3b$, где a может принимать значения 0, 1, 2, а b — значения 0, 1, 2, 3, 4.

Заметим, что 3 упаковки по 5 кг весят столько же, сколько 5 упаковок по 3 кг, то есть каждый способ заполнения можно характеризовать количеством наборов из 3 упаковок по 5 кг (или из 5 упаковок по 3 кг), содержащихся в x кг.

Таким образом,

$$x = 15 \cdot 108 = 1620 \text{ кг}$$

является одним из ответов задачи.

Удовлетворяют условию задачи также все наборы (независимо друг от друга) вида

$x = 1620 + 5a + 3b$, где $a = 0, 1, 2$, а $b = 0, 1, 2, 3, 4$.

При таких значениях a и b вес $5a + 3b$ нельзя представить другим набором коробок по 3 и 5 кг.

167. Ответ: 26 марта.

Заметим, что x не превышает 31, а y — 12. Так как сумма двух чисел — нечётное число, y не может быть чётным.

Следовательно, y может принимать значения 1, 3, 5, 7, 9, 11.

Поскольку 405 и $12x$ кратны 3, число $31y$ тоже кратно 3. Следовательно, и y кратно 3. Осталось проверить два значения y.

Если $y = 3$, то $x = 26$, в остальных случаях x не является целым.

168. Ответ: 5.

Удобнее подсчитывать результаты в целых числах: за выигрыш в партии в шахматах присуждать 2 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш — 0 очков.

Пусть из 10 класса в турнире участвовало x человек, тогда всех участников было $x + 2$ человека и вместе они набрали $(x + 2)(x + 1) = x^2 + 3x + 2$ (очков).

Значит, десятиклассники набрали на 7 очков меньше: $x^2 + 3x - 5$ очков.

Так как они набрали очков поровну, число x^2+3x-5 делится на x, то есть количество очков, набранных каждым учащимся 10 класса, равно

$$\frac{x^2+3x-5}{x}=x+3-\frac{5}{x}$$

и является натуральным числом.

Это возможно лишь при $x=1$ или при $x=5$.

В первом случае число очков каждого десятиклассника отрицательное, что не отвечает условию задачи. Следовательно, в турнире участвовало 5 десятиклассников.

169. Ответ: 81.

Обозначим искомое число через x. Заметим, что суммарное количество цифр в числах $6x$, $9x$ и $13x$ равно 10. Следовательно, число $13x$ четырёхзначное, а числа $6x$ и $9x$ трёхзначные.

Кроме того, выполнены неравенства

$$13x>1000,\quad 9x<1000,\quad 6x<1000,$$

откуда находим, что $77\le x\le 111$.

Соответственно

$$462\le 6x\le 666,\quad 693\le 9x\le 999,\quad 1001\le 13x\le 1443.$$

Докажем, что искомое число кратно 9. Так как все цифры разные, пусть $6x=\overline{abc}$, $9x=\overline{def}$ и $13x=\overline{ghik}$. При этом $a+b+c+\ldots+i+k=45$, а $6x+9x+13x=28x$.

Тогда

$$28x=1000g+100a+100d+100h+$$
$$+10b+10e+10i+c+f+k=$$
$$=1000g+100(a+d+h)+10(b+e+i)+c+f+k=$$

$$= 999g + 99(a + d + h) + 9(b + e + i) +$$

$$+ a + b + c + d + e + f + g + h + i + k.$$

Правая часть этого равенства делится на 9, откуда получаем, что $28x$ тоже делится на 9, а так как 28 не кратно на 9, число x делится на 9.

Тогда ясно ($77 \le x \le 111$), что условию могут удовлетворять только числа 81, 90, 99 и 108.

Ответ находится перебором.

170. Ответ: в 21 час 15 минут.

Будем считать, что промежуток времени между началами двух последовательных сеансов составляет целое число минут.

В промежутке с 12 часов 00 минут до 23 часов 05 минут (что составляет 665 минут) начались 7 сеансов, между которыми были 6 промежутков одинаковой продолжительности.

Через x обозначим продолжительность сеанса (в минутах). Получим неравенство

$$x < \frac{665}{6}\text{, или, поскольку } x \text{ целое, } x \le 110.$$

Второй сеанс начался не позднее 13 часов 59 минут, а значит,

$$x > \frac{546}{5}\text{, или, поскольку } x \text{ целое, } x \ge 110.$$

Следовательно, $x = 110$. Вычитая из времени начала седьмого сеанса 110 минут, получим 21 час 15 минут — время начала шестого сеанса.

Расписание, где продолжительность сеанса 110 минут, возможно. Например, сеансы могут начинаться в 12.05, 13.55, 15.45, 17.35, 19.25, 21.15 и 23.05.

171. Ответ: 2001.

1. Если $x \geq 2001$, то уравнение

$$x \oplus 1999 = 2001 \oplus x$$

равносильно уравнению

$$2x = 2001 + x,$$

откуда $x = 2001$, что удовлетворяет неравенству $x \geq 2001$.

2. Если $2001 > x \geq 1999$, то исходное уравнение равносильно уравнению

$$2x = 4002, \text{ и } x = 2001,$$

что не удовлетворяет неравенству $2001 > x \geq 1999$.

3. Если же $1999 > x$, то получим, что

$$x + 1999 = 4002,$$

и тогда $x = 2003$, что не удовлетворяет условию $1999 > x$.

172. Ответ: в третьем ящике 8 орехов.

Пусть x, y, z — количество орехов в первом, втором и третьем ящиках соответственно. Составим два уравнения: $x + 6 = y + z$, $y + 10 = x + z$.

Сложив их, получим $2z = 16$, откуда $z = 8$.

173. Ответ: 8.

Пусть одна четвёртая часть искомого числа равна x. Из условия задачи следует, что

$$x + 15 = 16x - 15,$$

откуда $x = 2$, и тогда искомое число равно 8.

174. Ответ: 4 апельсина.

Будем решать по старинке — «по действиям».

1. Если бы купили 10 апельсинов, то за них уплатили бы 2780 руб. — на 1062 руб. меньше, чем по условию.

2. Каждый лимон стоит дороже апельсина на 177 руб., то есть разница в 1062 руб. образовалась за счёт 6 купленных лимонов.

175. Ответ: 21 коп.

Пусть тетрадь стоит x, карандаш — y, ластик — z копеек. Тогда

$$12 = x + 2y + z \qquad (1)$$

и

$$27 = 2x + 3y + 3z. \qquad (2)$$

Найдём

$$a = 2x + 5y + z. \qquad (3)$$

Из уравнения (1) получим $z = 12 - 2y - x$. Подставив в соотношение (2) и (3) выражение для z, получим $x + 3y = 9$ и $a = x + 3y + 12$. Отсюда $a = 21$.

176. Ответ: 4, 7 и 13.

После дележа у братьев стало по 8 яблок.

При последнем дележе старший брат оставил себе половину своих яблок, значит, перед последним дележом у него было 16 яблок. Младшему и среднему братьям он отдал по 4 яблока, следовательно, перед этим у них было по 4 яблока.

Тогда перед предпоследним дележом у среднего брата было 8 яблок. Действительно, при предпоследнем дележе он отдал половину своих яблок, и у него осталось 4 яблока.

Следовательно, он отдал каждому из братьев по 2 яблока, то есть у младшего до этого было 2 яблока, а у старшего — 14 яблок.

Значит, перед первым дележом у младшего брата было 4 яблока, и каждому из братьев он дал 1 яблоко, то есть у среднего было 7 яблок, а у старшего — 13 яблок.

177. Ответ: 16 шариков.

Найдём количество шариков каждого цвета.

Обозначим количество красных шариков через K, жёлтых — $Ж$ и синих — $С$. Получим уравнения:

$$K + 6 = С + Ж\,,\ Ж + 10 = С + K\,,\ Ж + С + K = 20\,.$$

Следовательно, $С = 8$, $K = 7$, $Ж = 5$.

Наибольшее количество шариков будет вынуто, если сначала будут попадаться шарики двух цветов, а только потом будет вынут шарик третьего цвета.

С помощью перебора можно убедиться, что наибольшее количество шариков — 16 — будет вынуто, если сначала будут вынуты шарики синего и красного цветов.

178. Ответ: 12 монет.

1. В мешке не более 9 дукатов и пиастров (вместе взятых), иначе среди выбранных 10 монет могло не оказаться ни одного дублона.

2. В мешке не более 8 дублонов и пиастров (вместе взятых), иначе среди выбранных 9 монет могло не оказаться ни одного дуката.

3. В мешке не более 7 дублонов и дукатов (вместе взятых), иначе среди выбранных 8 монет могло не оказаться ни одного пиастра.

4. В сумме получаем, что в мешке не более 24 монет. Однако при суммировании мы каждую монету считали дважды. Следовательно, в мешке не более 12 золотых монет.

Например, в мешке могло быть 3 дублона, 4 дуката и 5 пиастров.

179. Ответ: мог.

Приведём пример: восемь самородков по 41 г каждый, один — 12 г, и ещё один — 60 г. Тогда первому и второму могло достаться по 3 самородка по 41 г каждый; третьему — 2 самородка по 41 г, один 12 г и один 60 г.

После того как отдали один самородок весом 60 г, требуемый раздел становится невозможен.

180. Ответ: Федя а) выиграл 6 партий; б) проиграл 21 партию.

Заметим, что количество партий равно половине количества побед всех четырёх друзей (в каждой партии — два победителя).

Следовательно, можно утверждать, что партий было не меньше 27 (столько раз выиграл Женя), а всего индивидуальных побед — не меньше 54.

Но общее количество индивидуальных побед Жени, Андрея и Толи равно 48 — шести побед не хватает.

Следовательно, Федя выиграл не менее 6 партий. Но так как он выиграл партий меньше всех, он выиграл ровно 6 партий.

Таким образом, всего индивидуальных побед было $48+6=54$, а партий сыграно 27. Так как Федя 6 партий выиграл, 21 партию он проиграл.

181. Ответ: наибольшее количество способов — 103, у шашки № 2.

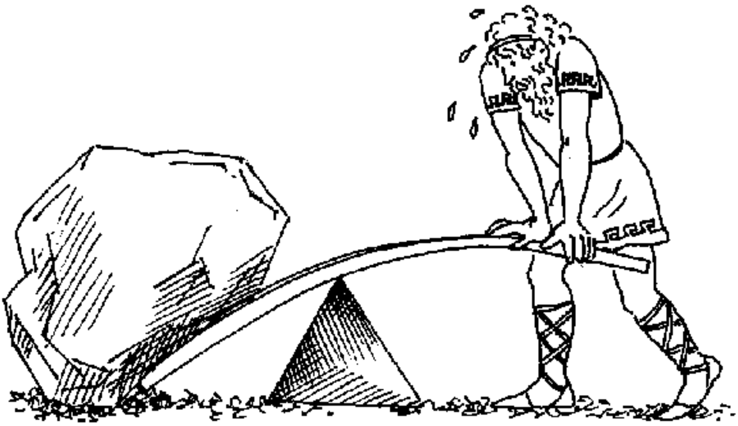
Запишем в каждой клетке доски число способов, которыми шашка может стать дамкой (см. рис. 4), начав движение с этой клетки: на клетках последней горизонтали поставим 1, 1, 1 и 1, на предпоследней горизонтали поставим числа 1, 2, 2 и 2 и так далее.

При этом каждое число равно сумме чисел, стоящих в предыдущей строке в клетках, расположенных «по диагонали».

1		1		1		1	
	2		2		2		1
2		4		4		3	
	6		8		7		3
6		14		15		10	
	20		29		25		10
20		49		54		35	
	69		103		89		35

Рис. 4

Глава III



Логические сюжеты

ГЛАВА III
ЛОГИЧЕСКИЕ СЮЖЕТЫ

Логика + арифметика

182. Рыбацкий рассказ. Николай сказал: «Я поймал рыб столько же, сколько мой сын». Пётр сказал: «Я поймал рыб втрое больше, чем мой сын». Известно, что никого, кроме упомянутых лиц, на рыбалке не было, а всего поймано 49 рыб. Могли ли оба высказывания быть правдивыми?

183. Немного логики. Вася сказал: «Если от двузначного номера моей квартиры отнять число, образующееся после перестановки его цифр, то получится номер дома, в котором я живу». Известно, что Лена, зная номер Васиного дома, сумела по этим данным определить номер Васиной квартиры. Определите его и вы.

184. Встретились два математика. Вот их диалог:

— У тебя два сына?

— Да, маленькие, в школу не ходят. Кстати, произведение их лет равно числу голубей возле нас.

— Этих данных недостаточно.

— А старшего сына я назвал твоим именем.

— Теперь я знаю, сколько им лет.

Сколько лет сыновьям?

185. Быки и коровы. Дано четырёхзначное число, все цифры которого различны. Известно, что числа 5860, 1674, 9432, 3017 содержат по две цифры, принадлежащие искомому числу, но ни одна из них не стоит на том же месте, что и в искомом числе. Найдите это число.

186. Номер квартиры. Математик пошёл к приятелю в гости, но, пока шёл, забыл номер его квартиры.

Расспрашивая соседей, он выяснил, что справедливы следующие утверждения:

1) если верно, что номер квартиры кратен 2, то он больше 50, но меньше чем 59;

2) если верно, что этот номер не кратен 3, то он больше 60, но меньше чем 69;

3) если верно, что этот номер не кратен 4, то он больше 70, но меньше чем 79.

Известно, что математик сумел определить номер квартиры по этим данным. Попробуйте и вы.

187. Рассеянный математик, переселившийся в новый район, забыл номер своей квартиры. Он помнил, что номер двузначный и является разностью квадратов двух чисел, меньшее из которых равно цифре десятков и вдвое больше числа единиц номера квартиры. Можно ли по этим данным восстановить номер квартиры?

В мире рыцарей и лжецов

188. На некотором острове живут два племени: рыцари и лжецы (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Перед нами три островитянина A, B и C, о каждом из которых известно, что он либо рыцарь, либо лжец. Двое из них (A и B) высказывают следующие утверждения. A: «Мы все лжецы». B: «Один из нас рыцарь». Кто из трёх островитян (A, B, C) рыцарь и кто лжец?

189. На острове рыцарей и лжецов. Перед нами три островитянина A, B и C, о каждом из которых известно, что он либо рыцарь, либо лжец. Пусть A и B высказывают следующие утверждения. A: «Мы все лжецы». B: «Ровно один из нас лжец». Можно ли определить, кто такой B: рыцарь или лжец? Можно ли определить, кто такой C?

190. У царя Гороха три сына: старший — Пётр, средний — Фёдор и младший — Иван-дурак. Царь хочет женить старшего сына на царевне Несмеяне. Известно, что два сына царя Гороха — рыцари, а один — лжец, но мало кто знает, кто из них кто. Царевна Несмеяна хочет выяснить, за кого (рыцаря или лжеца) ей предлагают выйти замуж. Может ли она это узнать, задав один вопрос Ивану? (Иван-дурак умеет отвечать на вопросы только «да» или «нет»; кто рыцарь, а кто лжец, ему известно.)

191. Рыцарь или лжец? В комнате собрались несколько жителей острова рыцарей и лжецов. Часть из них утверждали, что число рыцарей, находящихся в комнате, нечётно и число лжецов также нечётно. Остальные доказывали, что число и тех и других чётно. Один из присутствующих, подводя итоги обсуждения, заметил, что всего в комнате 37 человек. Кто он: рыцарь или лжец?

192. На конференции по математической физике за круглым столом собрались рыцари и лжецы, причём известно, что среди физиков и математиков лжецов поровну. Каждому из участников конференции задали вопрос: «Кто ваш сосед справа, физик или математик?» Подводя итоги, председатель заметил: «интересно, что нас здесь 34 человека, причём физиков и математиков поровну, однако каждый утверждает, что его сосед справа — математик». Определите, кем был председатель — рыцарем или лжецом?

193. Сколько правдивых? За круглым столом сидят 38 попугаев и Мартышка. Известно, что каждый из них либо рыцарь, либо лжец. Мартышка задала каждому попугаю один и тот же вопрос: «Кем является ваш сосед справа — рыцарем или лжецом?»

Первые два попугая (справа от Мартышки) ответили: «Мой сосед справа — лжец». Следующие два: «Мой сосед справа — рыцарь», следующие два: «Мой сосед справа — лжец» и так далее. По окончании опроса Мартышка сказала: «Среди нас не менее 9 рыцарей». Сколько рыцарей было на самом деле?

194. Кого больше? В комнате собрались лжецы, которые всегда лгут, и рыцари, которые всегда говорят правду. Из комнаты послышались голоса. Первый голос: 1) нас в комнате не более трёх человек; 2) все мы лжецы. Второй голос: 1) нас в комнате не более четырёх человек; 2) не все мы лжецы. Третий голос: 1) нас в комнате пятеро; 2) трое из нас лжецы. Кого в комнате больше: рыцарей или лжецов?

195. На остров рыцарей и лжецов приехал путешественник. Выйдя на берег, он встретил процессию из четырёх островитян, у каждого из которых в руках было по 4 шарика (всего — 12 красных и 4 синих). Каждый из них высказал одно утверждение. Первый сказал: «Красных шариков у меня меньше, чем синих». Второй сказал: «Синих шариков у меня не меньше, чем красных». Третий сказал: «Синих и красных шариков у меня поровну». Четвёртый: «Красных у меня не более одного». Укажите, сколько рыцарей могло быть среди них.

196. Сколько рыцарей? В комнате 12 человек. Каждый из них сделал одно утверждение. Первый сказал: «В комнате нет ни одного рыцаря». Второй: «В комнате не более одного рыцаря». Третий: «В комнате не более двух рыцарей» — и так далее. И наконец, последний, двенадцатый: «В комнате не более одиннадцати рыцарей». Сколько в комнате рыцарей?

197. Встреча в пути. Путешественник встретил трёх жителей острова рыцарей и лжецов и спросил каждого из них: «Сколько рыцарей среди твоих спутников?» Первый ответил: «Ни одного». Второй сказал: «Один». Что сказал третий?

198. День рождения рыцаря. На острове рыцарей и лжецов принят закон: теперь рыцари могут лгать, но только в день своего рождения. В остальные дни они обязаны говорить правду. Пьер и Джон — рыцари. На вопрос: «Когда ваш день рождения?», заданный 23 января, Пьер ответил: «Он был вчера», а Джон: «Он будет завтра». На следующий день (24 января) на тот же вопрос каждый из них ответил то же самое. Определите, если возможно, дату рождения каждого из них.

199. За круглым столом 8 человек, каждый из которых либо рыцарь, либо лжец. Каждый из них говорит: «Мои соседи — рыцарь и лжец». а) Сколько среди них лжецов? б) Сколько среди них лжецов, если за столом 9 человек?

200. Пещера с сокровищами. Чтобы попасть в пещеру с сокровищами на острове, населённом рыцарями и лжецами, путешественник должен пройти испытание: угадать пароль — натуральное число от 1 до 200. Путешественник знает, что жителям острова пароль известен. Случайно он подслушал разговор семи местных жителей (назовем их для краткости A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7), стоящих в очереди за квасом.

Вот что он услышал.

A_1: «Или A_3, или A_6 — лжец. Но может быть, и оба».

A_2: «Одно из двух: я либо первый рыцарь в очереди, либо первый лжец».

A_3: «Требуемое число делится на порядковые номера всех лжецов в очереди».

A_4: «Я последний лжец, который высказывается сегодня».

A_5: «В очереди имеются две пары стоящих друг за другом лжецов».

A_6: «Тот, кто стоит в очереди последним, — рыцарь».

A_7: «Сумма порядковых номеров всех рыцарей в очереди является делителем пароля».

Помогите путешественнику попасть в пещеру.

201. Кто есть кто? По подозрению в совершении преступления задержаны 5 человек: некоторые из них рыцари (всегда говорят правду), а остальные — лжецы (всегда лгут). Допрашивали подозреваемых по одному. Первый и второй утверждали одно и то же: «Среди остальных задержанных не менее половины — лжецы». Показания двух других тоже совпали: «Среди остальных задержанных не менее половины — рыцари». Один из задержанных от показаний отказался. Выясните, если возможно: а) сколько рыцарей среди задержанных; б) кто отказался от показаний — рыцарь или лжец.

202. На поляне расположились пятеро жителей острова рыцарей и лжецов и заезжий путешественник (не рыцарь и не лжец). Между жителями острова завязался разговор:

— Ровно половина присутствующих — лжецы, — сказал первый житель острова.

— Более четверти присутствующих — рыцари, — заметил второй.

— Более трети присутствующих — лжецы, — сказал третий.

— Рыцарей и лжецов среди присутствующих поровну, — сказал четвёртый.

— Вы все лжёте! — сказал пятый.

Сколько из них лжецов?

203. Социологический опрос. В парламенте острова, насёленного рыцарями и лжецами, представлены три политические партии: правые — «Любители правды», левые — «Объединённые лжецы» и центристы — партия «И те, и эти». Каждому депутату парламента (а их 100 человек) задали по три вопроса.

1. Являетесь ли вы членом партии «Любители правды»?

2. Являетесь ли вы членом партии «Объединённые лжецы»?

3. Являетесь ли вы членом партии «И те, и эти»?

В результате оказалось, что на первый вопрос положительно ответили 72 человека, на второй — 47 человек, а на третий — 31 человек.

Сколько лжецов в парламенте острова?

204. Полицейский и свидетели. Полицейский допрашивает большую группу свидетелей, часть из которых — рыцари (всегда говорят правду), остальные лжецы (всегда лгут). Прежде чем начать допрос по существу дела, полицейский хочет выяснить, кто из свидетелей лжёт, а кто говорит правду. Для этого он придумал следующую стратегию. Раз в день он собирает какую-нибудь группу свидетелей (возможно, всех или только одного) и спрашивает каждого из собравшихся, сколько рыцарей находится в данной группе. За сколько дней он может справиться со своей задачей?

Разные задачи

205. Загадочная тетрадь. Однажды на лестнице я нашёл странную тетрадь. В ней было написано 100 утверждений:

«В этой тетради ровно 1 неверное утверждение».

«В этой тетради ровно 2 неверных утверждения».

…

«В этой тетради ровно 100 неверных утверждений».

Какое утверждение здесь верно?

206. Опять лжецы. На острове рыцарей и лжецов 100 жителей. Однажды один из них сказал: «Среди нас ровно один рыцарь», второй — «Количество рыцарей кратно 2», третий — «Среди нас ровно два рыцаря», четвёртый — «Количество рыцарей кратно 3», ..., девяносто восьмой — «Количество рыцарей кратно 50», девяносто девятый — «Среди нас ровно пятьдесят рыцарей». Последний островитянин промолчал. Сколько рыцарей среди них могло быть?

207. Что сказал Вася? Антон, Боря и Вася — три приятеля. Каждый из них либо всегда говорит правду, либо всегда лжёт. На вопрос: «Есть ли среди двух остальных хоть один правдивый?» — Антон ответил «Да», Боря ответил «Нет». Что сказал Вася? Каждый из троих знает об остальных, кто правдивый, а кто лжец.

208. В некотором городе каждый житель — полицейский, вор или обыватель. Полицейские всегда врут обывателям, воры — полицейским, обыватели — ворам, а во всех остальных случаях жители города говорят правду. Однажды, когда несколько горожан водили хоровод, каждый сказал своему правому соседу: «Я полицейский». Сколько в этом хороводе было обывателей?

209. В классе 15 человек. Известно следующее.

1. Каждый, кто принёс циркуль, принёс и линейку.

2. Забыли циркуль 9 человек, забыли линейку 4 человека.

Каких учеников больше: тех, которые принесли циркуль, или тех, которые принесли линейку, но забыли циркуль?

210. Алёша, Боря и Витя учатся в одном классе. Один ездит домой из школы на автобусе, другой — на трамвае, третий — на троллейбусе. Однажды после уроков Алёша пошёл проводить друга до остановки автобуса. Когда мимо них проходил троллейбус, третий друг крикнул из окна: «Боря, ты забыл в школе тетрадь!» Кто на чём ездит домой?

211. Пятеро друзей встретились в один из дней школьных каникул и стали спорить. Андрей сказал: «Позавчера была пятница». Володя сказал: «Послезавтра будет вторник». Серёжа сказал: «Вчера была суббота». Дима сказал: «Завтра будет понедельник». Егор сказал: «Сегодня четверг». Один из них ошибся. Кто?

212. Перевод с ам-ямского. Дан русский текст и его перевод (построчный) на язык племени ам-ям.

Текст:	Перевод:
Мышка ночью пошла гулять.	Ам ту му ям
Кошка ночью видит — мышка!	Ту ля бу ам
Мышку кошка пошла поймать.	Гу ля ту ям

Составьте фрагмент русско-ам-ямского словаря по этому переводу (в языке ам-ям нет знаков препинания).

213. В турнире по настольному теннису, проходящем по круговой системе (каждый должен сыграть с каждым по одной партии), семь участников. Известно, что Андрей сыграл 6 партий, Борис — 5 партий, Вася и Гена — по 3 партии, Дима и Женя — по две, а Захар — одну. С кем успел сыграть Вася? Ответ объясните.

Ответы, комментарии, решения

182. Ответ: да, могли.

Это возможно, если Пётр — сын Николая.

Рассмотрим случаи.

1. Предположим, что на рыбалке присутствовало четыре человека, тогда можно предположить, что Николай вместе с сыном вместе поймали $2x$ рыб, а Пётр с сыном — $4y$, что не может в сумме давать 49 рыб, так как $2x + 4y$ — чётное число.

2. Если на рыбалке присутствовало три человека, то возможны два случая.

а) Николай — сын Петра, тогда Пётр вместе с сыном Николаем поймали $4x$ рыб, а все вместе — $5x$ рыб, что также не может равняться 49.

б) Пётр — сын Николая, тогда Николай вместе со своим сыном Петром поймали $6x$ рыб, а все вместе — $7x$ рыб, что возможно.

При этом Николай и его сын Пётр поймали по 21 рыбе, а сын Петра поймал 7 рыб.

183. Ответ: 90.

Пусть номер Васиной квартиры $\overline{AB}$. Номер Васиного дома кратен 9:

$$\overline{AB} - \overline{BA} = 10A + B - (10B + A) = 9(A - B).$$

Номер не более чем двузначный, следовательно, Лена выбирала из 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81 или 90.

Лена, зная номер дома, сумела определить номер квартиры; это означает, что цифры Васиной квартиры должны восстанавливаться единственным образом.

Такое возможно, только если $A = 9$, $B = 0$. Убедитесь в этом самостоятельно.

Так, например, $A - B = 8$ приводит к двум наборам цифр: $A = 9$, $B = 1$ и $A = 8$, $B = 0$.

184. Ответ: 1 и 4 года.

Сыновья маленькие — в школу не ходят, следовательно, возраст каждого не превышает 7.

Так как возрасты сыновей могли быть равны (второй математик смог ответить на вопрос после того, как узнал, что среди сыновей есть старший), произведение возрастов — квадрат натурального числа.

Получив информацию о произведении возрастов, второй математик не смог ответить на вопрос, следовательно, произведение раскладывается на множители двумя способами. Поищем подходящие квадраты:

1) $4 = 1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$ — подходит; 2) $9 = 1 \cdot 9 = 3 \cdot 3$ — не подходит, так как 9 лет — это слишком много; 3) $16 = 1 \cdot 16 = 2 \cdot 8 = 4 \cdot 4$ — не подходит, и так далее.

185. Ответ: 4306.

Искомыми не могут быть цифры, которые встречаются только один раз, иначе нашлась бы цифра, которая встречается в этих числах три раза, но такой цифры нет.

Следовательно, цифры 8, 5, 9 и 2 исключаются. В разряде тысяч могут стоять цифры 6, 4, 7; сотен — 1, 3, 7; десятков — 0, 4; единиц — 1, 3, 6. Ответ получите самостоятельно.

186. Ответ: 75.

Предположим, что номер квартиры больше чем 50, но меньше чем 59. Тогда он кратен 3 и 4 (следует из условий 2 и 3).

Но чисел, делящихся на 12, среди номеров от 50 до 59 нет.

Если номер квартиры больше чем 60, но меньше чем 69, то он кратен 4 (следует из условия 3), но не кратен 2 (следует из условия 1), что невозможно. Следовательно, номер квартиры больше чем 70, но меньше чем 79. В этом случае следует отбросить чётные номера (условие 1) и номера, не кратные 3 (условие 2). Остается единственное число — 75.

187. Ответ: да, можно.

Найдём все двузначные числа, в которых число десятков в два раза больше числа единиц. Это числа 21, 42, 63 и 84. Рассмотрим эти случаи последовательно:

1) $84 = x^2 - 8^2$, $84 + 64 = x^2$, $x^2 = 148$, что квадратом натурального числа не является;

2) $63 = x^2 - 6^2$, $63 + 36 = x^2$, $x^2 = 99$, что квадратом натурального числа не является;

3) $42 = x^2 - 4^2$, $42 + 16 = x^2$, $x^2 = 58$, что квадратом натурального числа не является;

4) $21 = x^2 - 2^2$, $21 + 4 = x^2$, $x^2 = 25$.

Следовательно, номер квартиры — 21.

188. Ответ: *A* и *C* — лжецы, *B* — рыцарь.

Предположим, что *A* — рыцарь, тогда его высказывание «Мы все лжецы» — ложь, что невозможно. Следовательно, *A* — лжец, и среди островитян есть хотя бы один рыцарь.

Может ли *B* быть лжецом? Нет, так как в этом случае рыцарем был бы *C* и высказывание лжеца *B* было бы верно. Следовательно, *B* — рыцарь, а *C* — лжец[1].

Задача вызвала оживленную дискуссию в жюри: что должна означать фраза островитянина *B* «Один из нас рыцарь»? То ли «Ровно один из нас рыцарь», то ли «Хотя бы один из нас рыцарь». При первой трактовке *C* — лжец (так в первоисточнике), При второй же трактовке *C* может быть как рыцарем, так и лжецом. Жюри не пришло к единодушному мнению, а поэтому засчитывались оба варианта решения.

---

[1] Задача заимствована из книги Р. Смаллиана «Как же называется эта книга?» — М.: 1981. с. 27, 34—35.

189. Ответ: C — рыцарь, кто B — неизвестно.

Очевидно, что A — лжец. Если B говорит правду, то B и C — рыцари, а если B лжёт, то A и B — лжецы, а C — рыцарь.

190. Ответ: может.

Один из самых простых вопросов: «Верно ли, что Фёдор — лжец?»

1. Иван ответит «да» в двух случаях: либо когда он и Пётр — рыцари, а Фёдор — лжец, либо когда он лжец, а Фёдор с Петром — рыцари.

2. Иван ответит «нет» только в случае, когда он и Фёдор — рыцари, а Пётр — лжец.

Важно понимать, что возможно всего три случая. Составим таблицу.

Ответы Ивана	Да	Да	Нет
Пётр	Рыцарь	Рыцарь	Лжец
Фёдор	Лжец	Рыцарь	Рыцарь
Иван	Рыцарь	Лжец	Рыцарь

Таким образом, если Иван ответил «нет», то Пётр — лжец, а при ответе «да» Пётр всегда рыцарь.

Аналогично будет рассматриваться ситуация со следующим вопросом: «Верно ли, что Фёдор — рыцарь?»

Возможны и другие варианты вопросов. Например:

«Верно ли, что Вы с Петром рыцари?»; «Если бы я спросила тебя, лжец ли Пётр, ты бы сказал да?» и др.

191. Ответ: лжец.

В комнате есть как рыцари, так и лжецы, поскольку об одном и том же факте высказаны несовместимые утверждения.

Какое бы из этих утверждений не было истинно, получается, что число людей в комнате чётно. Следовательно, подводящий итоги — лжец.

192. Ответ: председатель — лжец.

Предположим, что председатель — рыцарь.

Первое решение. По условию задачи среди физиков и математиков лжецов поровну, то есть число всех лжецов чётно. Тогда всего присутствуют 34 человека, и 17 из них — математики. Получается, что ровно половина сказавших — 17 человек — солгали. Противоречие. Значит, председатель конференции — лжец.

Второе решение. По условию задачи среди физиков и математиков лжецов поровну, тогда, учитывая равное количество математиков и физиков (по 17), получим, что количество физиков-рыцарей и математиков-рыцарей также одинаково. Значит, правее каждого математика-лжеца сидят несколько физиков (может быть, и один!), причём последний из них обязательно рыцарь, то есть на каждого математика-лжеца приходится физик-рыцарь, сидящий правее, а следовательно, число математиков-лжецов равно числу физиков-рыцарей.

Но количества физиков-рыцарей и математиков-рыцарей одинаковы, а также одинаковы и количества физиков-лжецов и математиков-лжецов. Следовательно, число участников конференции кратно 4, но 34 не кратно 4, а значит, председатель конференции — лжец.

193. Ответ: 29 рыцарей.

Рассмотрим два случая.

1. Пусть сидящий справа от Мартышки попугай — лжец. Тогда попугаи сидят в следующей последовательности (образуют цикл): *ЛРЛЛ ЛРЛЛ*... и так далее.

Следовательно, 38-й попугай, сидящий слева от Мартышки, — рыцарь, а сама Мартышка — лжец.

В этом случае получилось 10 рыцарей и 29 лжецов, считая Мартышку.

Получается, что Мартышка сказала правду, а этого не может быть.

2. Пусть справа от Мартышки сидит попугай-рыцарь. Тогда попугаи сидят в следующей последовательности (образуют цикл): *РЛРР РЛРР*... и так далее.

Значит, сидящий слева от Мартышки попугай — лжец, а сама Мартышка — рыцарь. Всего в этом случае 29 рыцарей, включая Мартышку, и 10 лжецов.

Следовательно, Мартышка сказала правду. Противоречия нет.

194. Ответ: поровну.

1. Рыцарь не мог сказать «все мы лжецы», следовательно, первый голос принадлежал лжецу.

Поэтому неверно, что все в комнате лжецы. Кроме того, неверно первое высказывание. Следовательно, в комнате больше трёх человек.

2. Второй голос принадлежит рыцарю, поскольку его второе высказывание верно. Тогда верно и его первое высказывание. Следовательно, в комнате не больше четырёх человек.

С учётом пункта 1 получаем, что в комнате четыре человека.

3. Третий голос принадлежит лжецу, поскольку его первое высказывание неверно. Тогда неверно и его второе высказывание, что лжецов трое.

Таким образом, лжецов не меньше двух, но не трое и не четверо. Следовательно, их двое.

195. Ответ: рыцарей могло быть 0, 1 или 2.

Докажем, что среди четырёх встреченных островитян не более двух рыцарей.

Действительно, если высказывания первого и третьего истинны одновременно, то синих шаров не менее 5. Следовательно, среди этих двух островитян есть лжец.

Если высказывания второго и четвёртого островитян истинны одновременно, то синих шаров не менее 5. Следовательно, среди этих двух островитян тоже есть лжец.

Значит, среди островитян не менее двух лжецов.

Приведём примеры, когда рыцарей 0, 1 или 2.

1. Рыцарей нет: у первого все шары красные, у второго и третьего по три красных и одному синему, у четвёртого два синих и два красных.

2. Рыцарь один: у каждого из первых трёх четыре красных шара (лжецы), у четвёртого четыре синих шара (он рыцарь).

3. Рыцарей два: у первого и чётвертого все шары красные (лжецы), у второго и третьего по два синих и два красных шара (рыцари).

196. Ответ: шестеро.

Количество рыцарей равно количеству верных утверждений. Предположим, что рыцарей меньше шести, тогда получается, что последние семь человек сказали правду, — противоречие. Предположим, что правду сказали более шести человек, тогда первые семь лгут — противоречие. Утверждение «В комнате не более шести рыцарей» условию не противоречит.

197. Ответ: один.

Первый сказал: «Ни одного». Следовательно, он лжец, иначе получалось бы, что второй и третий — лжецы, что противоречит высказыванию второго.

Второй сказал: «Один». Если это неправда, то третий — лжец, но тогда первый сказал правду, что, как мы доказали, невозможно. Следовательно, второй островитянин — рыцарь.

Но тогда и третий островитянин — рыцарь, а следовательно, его ответ: один.

198. Ответ: Пьер родился 23 января, Джон — 24 января.

Заметим, что оба рыцаря говорят одни и те же высказывания два дня подряд. Поэтому одно из их высказываний ложно.

Если 23 января Пьер сказал правду (то есть он родился 22 января), то 24 января он солгал, а лгать он может только в свой день рождения. Противоречие, следовательно, он солгал 23 января — в свой день рождения.

Если Джон сказал правду 24 января (то есть он родился 25 января), то 23 января он солгал, а лгать он может только в свой день рождения. Противоречие, следовательно, он солгал 24 января — в свой день рождения.

199. Ответ: а) если за столом 8 человек, то все лжецы; б) если за столом 9 человек, то лжецов либо 9, либо 3.

Докажем, что при любом количестве людей, сидящих за столом, ответ «Все лжецы» подходит.

1. Хотя бы один из сидящих за столом — лжец. Если бы за столом сидели только рыцари, то высказывание каждого из них «Рядом со мной сидят рыцарь и лжец» было бы ложным.

2. Соседями лжеца могут быть либо 2 лжеца, либо 2 рыцаря.

3. Если у лжеца оба соседа лжецы, то и дальше за столом сидят одни лжецы, иначе высказывание одного из лжецов «Рядом со мной сидят рыцарь и лжец» будет правдой.

Предположим, что не все сидящие за столом — лжецы.

4. Если оба соседа лжеца — рыцари, то за каждым рыцарем должен сидеть ещё рыцарь, затем лжец, затем снова два рыцаря и так далее. Тогда если за столом 9 человек, то лжецов трое (см. рис. 1), а если 8 человек, то получим противоречие (см. рис 2).

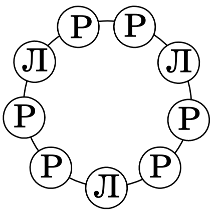


Рис. 1

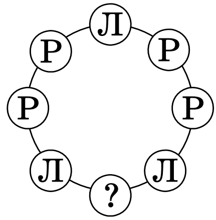


Рис. 2

200. Ответ: пароль — 180.

Для начала необходимо определить, кто среди этих жителей лжец, а кто рыцарь.

A_4 — лжец, так как рыцарь не мог назвать себя лжецом, но лжец может назвать себя последним лжецом и солгать при этом. Тогда после A_4 есть ещё лжецы.

Кем бы ни был A_2 — рыцарем или лжецом — в любом случае из его утверждений следует, что A_1 — лжец. Следовательно, A_3 и A_6 — рыцари.

Тогда, из утверждения A_6 следует, что A_7 — рыцарь.

После A_4 должен стоять хотя бы один лжец, A_6 и A_7 — рыцари, тогда A_5 — лжец.

Поскольку A_5 — лжец, нет двух пар стоящих друг за другом лжецов. Одной из пар являются лжецы A_4 и A_5, следовательно, A_2 —рыцарь.

Теперь, зная, какие высказывания являются истинными, а какие — нет, получим, что искомое число делится на 1, 4, 5 и на $2+3+6+7=18$.

НОК (4, 5, 18) равно 180. Это единственное число, меньшее 200, подходящее в качестве пароля.

201. Ответ: а) задержаны 3 рыцаря; б) определить нельзя.

Предположим, что среди высказавших второе утверждение есть лжец. Тогда лжецов кроме него ещё не менее трёх. Следовательно, один из этих лжецов окажется среди высказавших первое утверждение, и утверждение будет истинным. Противоречие.

Таким образом, второе утверждение могли высказать только рыцари, откуда следует, что рыцарей не меньше трёх.

Теперь предположим, что рыцарей четверо или больше. Тогда есть рыцарь среди высказавших первое утверждение. Но получается, что он солгал, а такого быть не может.

Единственный оставшийся вариант — три рыцаря, два лжеца. Такое может быть в двух случаях.

1. Отказался от показаний рыцарь. В этом случае первое утверждение высказали лжецы, второе — рыцари.

2. Отказаться от показаний мог и лжец. Тогда один из высказавших первое утверждение — рыцарь, а другой — лжец. Второе утверждение высказали два рыцаря.

202. Ответ: четверо.

Четвёртый — лжец, поскольку среди присутствующих 5 жителей острова, то есть нечётное число.

Пятый тоже лжец. Если бы он сказал правду, то среди них было бы четыре лжеца, но в этом случае третий тоже сказал правду. Противоречие.

Третий — рыцарь. Если его высказывание ложно, то лжецов не менее трёх, и его высказывание становится истинным. А значит, лжецов среди присутствующих не менее трёх.

Из высказываний первого и второго либо одно, либо оба ложны, а так как высказывание третьего — истина, нам требуется наличие ещё одного лжеца.

Докажем что второй — лжец. Первый утверждает, что среди присутствующих ровно три лжеца. Если это правда, то второй — лжец. Если это утверждение ложно, то второй всё равно лжец.

Поскольку высказывание второго неверно, рыцарь ровно один. Следовательно, высказывание первого тоже ложно.

203. Ответ: 50 лжецов.

В результате опроса получено 150 положительных ответов. Рыцарь отвечает положительно один раз (про свою партию), а лжец — два раза (про те, в которых не состоит). Если бы все опрошенные были рыцарями, то было бы получено ровно 100 положительных ответов. Следовательно, 50 «лишних» ответов дали 50 лжецов.

204. Ответ: 2 дня.

В первый день полицейский должен собрать и опросить всех свидетелей. В результате опроса он получит не менее двух вариантов ответов, так как рыцари, говорящие только правду, будут единодушны, а лжецы могут обманывать как вздумается, в том числе дать одинаковый ложный ответ.

По результатам опроса следует разбить всех свидетелей на группы, причём в одну группу входят люди, давшие одинаковый ответ.

Пусть в результате опроса получилось несколько групп, но лишь одну из них будут составлять рыцари. Во второй день полицейскому следует выбрать по одному представителю из каждой группы, и тот, кто на вопрос о количестве присутствующих рыцарей даст ответ «Один», будет представителем группы рыцарей.

205. Ответ: «В этой тетради ровно 99 неверных утверждений».

Любые два утверждения в тетради противоречат друг другу, следовательно, в тетради не более одного верного утверждения. Единственное утверждение, которое не противоречит условию задачи, — «В этой тетради ровно 99 неверных утверждений». Убедитесь в этом самостоятельно.

206. Ответ: 1, 2, 3 или 4 рыцаря.

Любой собственный делитель числа N не превосходит $\frac{N}{2}$, следовательно, количество делителей числа N не превосходит $\frac{N}{2}+1$.

Пусть в беседе участвует N рыцарей.

1. Тогда истинных утверждений вида «Количество рыцарей кратно...» может быть не более $\frac{N}{2}$, так как фразы «Количество рыцарей кратно 1» не было, а истинных утверждений вида «Количество рыцарей равно...» может быть не более одного.

Следовательно, истинных утверждений не более $\frac{N}{2}+1$.

2. Количество истинных утверждений должно совпадать с числом N, если промолчавший — лжец, или с числом $N-1$, если промолчавший — рыцарь.

Рассмотрим два случая.

а) Если промолчал лжец, то $\frac{N}{2}+1>N$, что верно при всех $N>2$, следовательно, число рыцарей не превышает 2.

б) Если промолчал рыцарь, то $\frac{N}{2}+1>N-1$, что верно при всех $N>4$. Тогда число рыцарей не превышает 4.

Следовательно, рыцарей не более четырёх.

Возможны следующие случаи.

1. Если рыцарей нет совсем, то истинны все утверждения вида «Количество рыцарей делится на...», что невозможно.

2. Если рыцарь один, то верно утверждение 1, а промолчавший — лжец.

3. Если рыцарей два, тогда верны утверждения 2, 3, а промолчавший — лжец.

4. Если рыцарей три, то верны утверждения 4, 5, а промолчавший — рыцарь.

5. Если рыцарей четыре, то верны утверждения 2, 6, 7, а промолчавший — рыцарь.

207. Ответ: Вася сказал «да».

Если предположить, что Боря сказал правду, тогда Антон — лжец, но, поскольку Антон высказал верное утверждение, это не так. Следовательно, Боря — лжец.

Если предположить, что Антон — лжец, то Боря и Вася тоже лжецы, но в этом случае высказывание Бори — истина, чего не может быть.

Если предположить, что Антон сказал правду, тогда Вася тоже сказал правду, из чего делаем вывод, что Вася ответил «да».

208. Ответ: ни одного.

Предположим, что где-то в хороводе стоит обыватель. Если его сосед слева сказал про себя, что он полицейский, то, так как полицейские врут обывателям, сосед слева соврал. Но соврать обывателю мог только полицейский. Противоречие.

209. Ответ: больше тех, кто принесли циркуль.

Принесли циркуль $15 - 9 = 6$ человек. Те, которые забыли линейку, забыли и циркуль, — таких четверо. Тех, которые принесли линейку, но забыли циркуль, $9 - 4 = 5$ (от забывших циркуль «отнимаем» забывших и циркуль, и линейку).

210. Ответ: Алёша ездит в школу на трамвае, Боря — на автобусе, Витя — на троллейбусе.

Алёша не может ездить на автобусе (так как провожал друга на автобусную остановку), не может и на троллейбусе (так как увидел друга в окне троллейбуса), следовательно, он ездит на трамвае. Боря не ездит на троллейбусе (ему крикнули из троллейбуса), значит, он ездит на автобусе. Вите остается только троллейбус.

211. Ответ: Егор.

Из утверждений Андрея, Володи, Серёжи и Димы следует, что сегодня воскресенье. А из утверждения Егора следует, что сегодня четверг. Следовательно, Егор ошибся.

212. Ответ: фрагмент словаря выглядит так: *видит — бу, гулять — му, кошка — ля, мышка — ту, ночью — ам, поймать — гу, пошла — ям.*

1. Слова *гулять, видит, поймать* встречаются в своих строчках по одному разу, поэтому им соответствуют слова «*му*», «*бу*» и «*гу*».

2. Так как слово *мышка* встречается во всех трёх строках, ему соответствует «*ту*».

3. Так как слово *ночью* встречается в первой и второй строках, ему соответствует «*ам*».

4. Так как слово *пошла* встречается в первой и третьей строках, ему соответствует «*ям*».

5. Так как слово *кошка* встречается во второй и третьей строках, ему соответствует «*ля*».

213. Ответ: с Андреем, Борисом и Геной.

1. Андрей сыграл шесть партий, то есть со всеми остальными участниками турнира, а значит, в том числе и с Васей.

2. Следовательно, в турнире «без Андрея» Борис сыграл 4 партии, Вася и Гена — по 2 партии, Дима и Женя — по одной, а Захар ни одной.

3. Получается, что Борис сыграл со всеми участниками, кроме Захара (и с Васей в том числе), а в турнире «без Андрея, Бориса и Захара» Вася и Гена — по одной партии, Дима и Женя — ни одной.

4. Следовательно, Вася и Гена играли между собой.

Глава IV

Алгоритмы и дискретные процессы

ГЛАВА IV
АЛГОРИТМЫ И ДИСКРЕТНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Каков будет результат?

214. Выявите закономерность, в соответствии с которой составлена данная последовательность: 1, 11, 12, 1121, 1321, 122131, 132231, 122232, ... Укажите следующее число.

215. Дана последовательность чисел:

4, 6, 9, 10, 14, 15, 21, ...

Сформулируйте правило, по которому она составлена. Запишите три следующих числа.

216. Лист бумаги разорвали на 4 части, некоторые из этих частей разорвали ещё на 4 части и так далее. Когда все части собрали, Вася насчитал 66 обрывков, Петя — 67. Кто из них прав?

217. Шкатулки. В некоторые из 18 больших шкатулок положили по 6 шкатулок поменьше. В некоторые из шкатулок «поменьше» положили по 6 совсем маленьких шкатулок. Сколько всего шкатулок могло лежать на столе, если пустых среди них 88 штук?

218. Старик Хоттабыч может совершить чудо, вырвав из своей волшебной бороды один волос (при этом на месте двух вырванных волос вырастает один новый). Сколько всего чудес может совершить старик Хоттабыч, если первоначально в его бороде 2001 волос?

219. В саду Деда Мороза вот уже более 1000 лет живёт Волшебная ёлка. Известно, что каждое утро на ней вырастают 100 иголок и каждая иголка живёт ровно 4 года, а затем отмирает. Сколько же всего иголок на Волшебной ёлке?

220. Вирусы и бактерии. В колонию, состоящую из 200 бактерий, попадает один вирус. В первую минуту он уничтожает одну бактерию, затем делится на два новых вируса, и одновременно каждая из оставшихся бактерий тоже делится на две новые. В следующую минуту возникшие два вируса уничтожают две бактерии, затем оба вируса и все оставшиеся бактерии снова делятся, и так далее. Будет ли эта колония жить бесконечно долго или погибнет, а если погибнет, то через какое время это произойдёт?

221. Сколько их будет? В некоторой колонии бактерий следующий закон развития. Бактерия живёт ровно час и каждые полчаса порождает новую бактерию — всего две бактерии за жизнь.

Сколько бактерий получится из одной бактерии через: а) 1 час; б) 3 часа; в) 6 часов?

222. Можно ли получить результат? На доске написаны три целых числа A, B, C. В следующей строке под ними пишут разности $A-B$, $B-C$, $C-A$ и так далее, до пятой строки включительно. Подберите числа A, B и C так, чтобы в пятой строке было число 1998. Можно ли подобрать числа A, B и C так, чтобы в пятой строке получилось число 1997?

223. Клетки марсианского организма «А-2003» представляют собой замкнутую «цепочку» и могут находиться в двух состояниях — «сон» и «активность». «Активная» клетка раз в секунду передаёт сигнал, который за секунду доходит до двух соседних клеток. В следующую секунду клетка «активна», если к ней пришёл сигнал от одной из соседних клеток. Если же сигнал пришёл с двух сторон или не пришёл вовсе, то клетка погружается в «сон». Известно, что организм «*A*-2003» живёт до тех пор, пока хотя бы одна его клетка «активна». Сколько секунд проживёт организм, изображённый: а) на рис. 1; б) на рис. 2? «Активные» клетки выделены серым цветом.

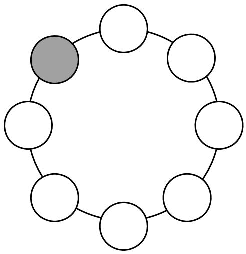


Рис. 1

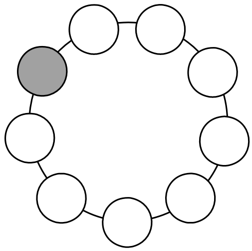


Рис. 2

224. Четырнадцать детей: 7 мальчиков и 7 девочек — решили разделиться на две команды. Они встали в круг и начали считаться (по часовой стрелке). Каждый шестой выходил из круга, и счёт начинался заново со следующего игрока. Так продолжалось до тех пор, пока 7 вышедших из круга игроков не образовали команду, причём оказалось, что она состоит из одних мальчиков. Изобразите схематически, как могли бы стоять мальчики и девочки (не забудьте указать, с кого начинался счёт).

Придумайте алгоритм

225. У Змея Горыныча 1000 голов. Богатырь может одним ударом отрубить 1, 17, 21 или 33 головы, но при этом вырастает соответственно 10, 14, 0 или 48 голов. Если все головы отрублены, то новые не вырастают. Сможет ли богатырь победить Змея?

226. Число на доске. С числом, записанным на доске, разрешается производить следующие операции: умножать на 2 или стирать его последнюю цифру. Как с помощью этих операций из числа 458 получить число 14?

227. Пять монет расположены на отрезке прямой. За один ход разрешается перевернуть любые три рядом лежащие монеты. Можно ли добиться того, чтобы все монеты лежали вверх орлом, если: а) средняя лежит вверх орлом, а остальные — решкой; б) вверх орлом первоначально лежит только вторая монета?

228. Удивительный квадрат. В клетках квадрата 3×3 стоят знаки: один «плюс» в углу, а остальные «минусы» (см. рис. 3). За одну операцию разрешается изменять все знаки в одной строке либо в одном столбце на противоположные. Можно ли после нескольких таких операций сделать все знаки плюсами?

+	−	−
−	−	−
−	−	−

Рис. 3

229. Откройте сейф. У сейфа 16 ручек, которые расположены в 4 ряда по 4 ручки в ряду. Каждая ручка может находиться в одном из двух положений: горизонтальном или вертикальном. При повороте любой ручки поворачиваются все ручки в том ряду и в том столбце, где она находится. Сейф открывается, если все ручки находятся в горизонтальном положении. Верно ли, что при любом исходном положении ручек сейф можно открыть?

230. Частный случай. Клетки таблицы 3×3 раскрашены в три цвета (см. рис. 4). За одну операцию разрешается изменить цвет клеток в какой-либо строке (или в каком-нибудь столбце), соблюдая два правила.

1. Каждая клетка в выбранной строке (или выбранном столбце) должна изменить свой цвет.

2. Если у двух каких-либо клеток цвета совпадали до изменения, то цвета этих клеток должны совпадать и после изменений, а если цвета двух клеток были различны, то они должны остаться различными и после изменений.

Можно ли сделать данную таблицу одноцветной, выполнив не более 10 операций?

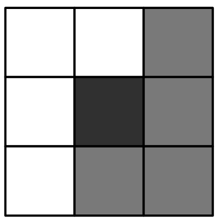


Рис. 4

231. Продолжение предыдущей задачи. Клетки таблицы 3×3 раскрашены в три цвета произвольным образом. За одну операцию разрешается изменить цвет клеток в какой-либо строке (или в каком-нибудь столбце), соблюдая два правила.

1. Каждая клетка в выбранной строке (или выбранном столбце) должна изменить свой цвет.

2. Если у двух каких-либо клеток цвета совпадали до изменения, то цвета этих клеток должны совпадать и после изменений, а если цвета двух клеток были различны, то они должны остаться различными и после изменений.

Докажите, что можно сделать произвольную таблицу 3×3 одноцветной, выполнив не более 15 операций.

232. Электронный замок. На пути к сокровищам Али-Баба должен открыть ещё один — электронный — замок. В настоящий момент на экране замка высвечены четыре числа 1, 2, 3, 4. Чтобы открыть замок, требуется получить на экране числа 2, 0, 0, 7. За один шаг можно: 1) умножить одно из чисел на 2; 2) одновременно вычесть из каждого числа по 1. Сможет ли Али-Баба открыть замок?

233. Игральный автомат. С натуральным числом, записанным в десятичной системе, разрешается проделать следующие операции: 1) приписать на конце цифру 4; 2) приписать на конце цифру 0; 3) разделить на 2 (если число чётно). а) Можно ли из числа 4 получить 2007? б) Какие числа можно получить из числа 4?

234. Игральный автомат снабжён рычагами, каждый из которых может находиться в двух положениях: «опущен» (положение 0) и «поднят» (положение 1), причём в начале игры все рычаги находятся в положении 0. За один ход можно изменить положение одного рычага. Если рычаги оказываются в некоторой («правильной») комбинации, то игра заканчивается выигрышем игрока, а если какая-то комбинация повторится два раза, то игрок проиграл. Правильная комбинация рычагов игроку неизвестна. Может ли игрок гарантированно выиграть, если в автомате: а) три рычага; б) четыре рычага?

235. Кодовый замок можно открыть, если перевести все его кнопки в состояние «включено» (см. рис. 5). Для этого разрешается за один ход выбрать любой квадрат 2×2 и поменять состояния всех выключателей в этом квадрате на противоположные. Можно ли, сделав несколько таких ходов, открыть замок? Если можно, покажите, как это сделать. Если нет, объясните почему. *Примечание*: 0 — состояние «выключено», 1 — состояние «включено».

0	1	0	1
1	0	1	0
0	1	0	1
1	0	1	0

Рис. 5

236. На кодовом замке имеются кнопки с цифрами 1, 2 и 3 (никаких других нет). Код состоит из трёх цифр (может быть, и одинаковых). Замок откроется в том случае, если в правильном порядке нажаты все цифры его кода. Запишите последовательность цифр наименьшей длины, в которой обязательно встретится код, открывающий замок.

237. Проверка качества. Имеется несколько микросхем, снабжённых лампочками, и прибор, предназначенный для их проверки. В прибор можно вставлять по две микросхемы за один раз, и тогда на каждой из них может загореться лампочка. Известно, что на исправной микросхеме лампочка загорается только в том случае, если другая вставленная в прибор микросхема неисправна, а на неисправной микросхеме — случайным образом. Известно, что больше половины микросхем исправны. Можно ли с помощью данного прибора выявить все неисправные микросхемы?

238. Белоснежка и 2015 гномов. В один прекрасный день каждый из 2015 гномов обиделся на какого-то другого гнома (одного) и на каждого гнома обиделся какой-то другой гном (один). Белоснежке требуется распределить гномов на три группы так, чтобы в каждой из групп не было гномов, обиженных на кого-нибудь из данной группы. Всегда ли это возможно? Ответ обоснуйте.

Построения

239. Начертить отрезок. Как с помощью прямоугольной плитки размером 7×9 см начертить на листе бумаги отрезок в 1 см?

240. Кузнечик прыгает по координатной оси малыми и большими прыжками. Большой прыжок — 12 единичных отрезков, малый — 7.

Может ли он попасть:

а) из точки с координатой –1 в точку с координатой 9;

б) из произвольной точки с целой координатой в любую другую?

241. Возвращение кузнечика. Кузнечик прыгает по прямой дорожке. Каждый следующий прыжок на 1 м длиннее предыдущего: длина первого прыжка — 1 м, второго — 2 м, третьего — 3 м и так далее. Сможет ли он вернуться на место старта, сделав ровно 2007 прыжков?

Взвешивания и переливания

242. В школьном кабинете химии имеются три полные банки с серной кислотой ёмкостью 1, 2 и 3 литра. Концентрация кислоты в этих банках неизвестна (скорее всего, она различна, но в точности этого никто не знает). Требуется перелить кислоту в три пустые банки такой же ёмкости так, чтобы концентрация кислоты во всех банках была одинакова. Как это сделать?

243. На склад привезли 99 одинаковых полных бочек серной кислоты неизвестной (возможно, различной) концентрации. По условиям контракта необходимо, чтобы концентрация кислоты во всех бочках была одинакова. Как этого добиться, если в вашем распоряжении ещё одна бочка (пустая) и прибор, позволяющий переливать любое количество жидкости из бочки в бочку?

244. В песочнице. Как при помощи чашечных весов без гирь разделить 24 кг песка на две кучи весом 9 кг и 15 кг?

245. Экспертиза. Имеются 13 одинаковых с виду монет, из которых 7 монет настоящие, а остальные — фальшивые. Все настоящие монеты весят одинаково, а каждая фальшивая — на 1 грамм легче или тяжелее настоящей. Имеются электронные чашечные весы, которые показывают разность масс грузов на чашках. Эксперт берёт наугад одну монету. За какое наименьшее количество взвешиваний он сможет выяснить, фальшивая она или настоящая?

246. Пять одинаковых на вид кубиков весят соответственно 1000, 1001, 1002, 1004 и 1007 г. За какое наименьшее число взвешиваний на электронных весах можно найти кубик весом 1000 г?

247. Электронные весы. Перед вами четыре мешка монет. Известно, что в каждом мешке находятся либо только настоящие монеты весом 10 г, либо только фальшивые — весом 11 г. В вашем распоряжении электронные весы. Сколько взвешиваний вам потребуется, чтобы выяснить, в каких мешках фальшивые монеты? Монет в мешках много, но неизвестно сколько.

248. Каков вес, таков и номинал. Известно, что настоящие монеты в 1, 2, 3 и 5 копеек весят соответственно 1, 2, 3 и 5 грамм. Среди четырёх монет (по одной каждого достоинства) одна бракованная — она отличается весом от настоящей. Можно ли с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь определить бракованную монету?

249. На столе три слитка золота весом в 3, 4 и 5 г. На каждом слитке указан вес, но надписи могут быть перепутаны. Вес слитков можно сравнивать на чашечных весах без гирь, но в момент взвешивания на одну из чашек (любую) прыгает невидимый гном весом 1 г. Как, сделав не более двух взвешиваний, выяснить правильный вес хотя бы одного слитка?

250. Дано шесть гирь: две зелёные, две красные, две синие. В каждой паре одна гиря тяжёлая, а другая лёгкая, причём все тяжёлые гири весят одинаково и все лёгкие гири весят тоже одинаково. Можно ли за два взвешивания на чашечных весах найти все тяжёлые гири?

251. Легче, тяжелее или...? Известно, что из 40 монет две фальшивые (одна из фальшивых монет весит несколько больше настоящей, другая — несколько меньше, все настоящие монеты весят одинаково). Можно ли за 4 взвешивания на чашечных весах без гирь узнать: две фальшивые монеты легче двух настоящих, тяжелее их или равны им по весу?

252. Старая задача. Среди 12 монет имеется одна фальшивая. Известно, что фальшивая монета отличается от настоящих, но неизвестно, легче она настоящей или тяжелее. Все настоящие монеты имеют одинаковую массу. С помощью трёх взвешиваний на чашечных весах без гирь выделите фальшивую монету и одновременно установите, легче она или тяжелее остальных.

253. Радиоактивные шары. Как с помощью индикатора радиоактивности обнаружить за семь измерений два радиоактивных шара, находящихся среди пятнадцати одинаковых шаров? Измерения можно производить как на отдельно взятом шаре, так и на группе из произвольного количества шаров, однако индикатор указывает лишь на наличие радиоактивности, но не даёт информации о количестве радиоактивных шаров в группе.

Можно или нет?

254. Три нуля. На доске написаны три числа: 19, 9 и 7. С этими числами разрешается делать две операции: 1) удвоить одно из чисел; 2) отнять 1 от каждого из трёх чисел. Можно ли, проделав несколько таких операций, получить три нуля?

255. Числа в вершинах куба. В каждой вершине куба записано число. За один шаг разрешается к каждому из двух чисел, находящихся на концах одного (любого) ребра, прибавить по единице. Можно ли за несколько таких шагов добиться того, чтобы все восемь чисел стали между собой равны, если вначале они были поставлены, как: а) на рис. 6; б) на рис. 7?

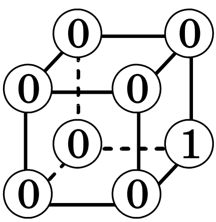


Рис. 6

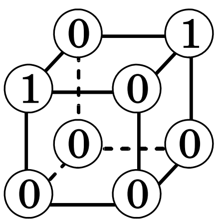


Рис. 7

256. Шестнадцать чисел. Существует ли последовательность из 16 целых чисел, у которой сумма любых 7 идущих подряд членов последовательности отрицательна, а сумма любых 11 идущих подряд членов последовательности положительна?

257. Семнадцать чисел (продолжение предыдущей задачи). Тот же вопрос для 17 целых чисел.

Управление ресурсами

258. Могут ли три человека, имея в своем распоряжении двухместный мотоцикл, преодолеть расстояние 60 км за три часа, если скорость мотоцикла 50 км/ч, а скорость пешехода 5 км/ч?

259. Ледяная пустыня. Путешественник хочет пересечь арктическую пустыню за 6 дней. Известно, что один человек способен взять с собой припасов на 4 дня. Он не сможет преодолеть весь путь в одиночку, но он может взять с собой носильщиков. Сколько человек он должен взять с собой и как организовать путешествие, чтобы он мог благополучно пересечь пустыню, а все носильщики смогли вернуться домой?

260. На Марсе. Путешественник хочет пересечь марсианскую пустыню. Его марсоход тратит 1 кг топлива на 100 км пути. В распоряжении путешественника 45 кг топлива, но бак марсохода вмещает не более 15 кг. Докажите, что путешественник может пересечь пустыню шириной 2300 км. Может ли путешественник пересечь пустыню шириной больше 2300 км?

261. В 1975 году Антон пошёл в молочный магазин. Денег у него не было, но были пустые бутылки — 6 литровых (стоимостью 20 копеек) и 6 поллитровых (стоимостью 15 копеек). В магазине было разливное молоко по 22 копейки за литр. Другой посуды, кроме пустых бутылок, у Антона не было. Какое наибольшее количество молока он мог принести домой?

262. Гулливер попал в страну лилипутов, имея 7 000 000 рублей. На все деньги он сразу же купил кефир по цене 7 рублей за бутылку (пустая бутылка стоила 1 рубль). Выпив весь кефир, он сдал бутылки и на все вырученные деньги сразу купил кефир. При этом он заметил, что и стоимость кефира, и стоимость пустой бутылки выросли в два раза. Затем он снова выпил весь кефир, сдал бутылки и на все вырученные деньги снова купил кефир и так далее. При этом между каждыми двумя посещениями магазина и стоимость кефира, и стоимость пустой бутылки возрастали в два раза. Сколько бутылок кефира выпил Гулливер?

263. «Ну, погоди!» Перед очередными съёмками Волк и Заяц соревнуются в беге на 5,5 км. Известно, что Волк пробегает каждый участок дистанции длиной в 1 км за 8 минут, а Заяц — за 8 минут и 1 секунду. Свидетели утверждают, что Заяц оказался на финише раньше Волка. Могло ли так случиться?

264. Али-Баба нашёл пещеру, полную золота и алмазов. Известно, что на базаре килограмм золота стоит 20 динаров, а килограмм алмазов — 60 динаров. Мешок, полный золота, весит 200 кг, а такой же мешок, полный алмазов, — 40 кг. Али-Баба может вынести один мешок весом не более 100 кг. Что и в каком количестве ему следует взять?

265. Мартышка и бананы. Мартышка собрала 100 бананов общим весом 10 кг. Помогите Мартышке накормить этими бананами Слонёнка и Удава так, чтобы никто из них не обиделся: они могут обидеться, если один съест бананов хотя бы на 100 г больше другого. (Бананы разного веса: от 20 до 200 г.)

Играют двое

266. Программист Федя играет с компьютером в следующую игру. На экране компьютера — число 123. Каждую минуту компьютер увеличивает число на 102. Федя может после любого хода компьютера переставлять цифры у полученного числа. Компьютер выиграет, если на экране появится четырёхзначное число. Может ли Федя играть так, чтобы не проиграть?

267. Кощей Бессмертный и Баба-яга играют в популярную в Муромском лесу игру «Мухоморы». Правила игры: перед игроками — две кучи мухоморов. Они берут грибы из куч поочерёдно, причём за один ход можно взять любое количество грибов, но только из одной кучи. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Пропускать ход нельзя.

Кто выиграет при правильной игре, если в одной куче 100 грибов, а в другой — 101, а начинает игру Баба-яга?

268. Оля и Коля играют на листе бумаги «в клетку» размером 9×9. Правила игры: 1) игроки по очереди закрашивают одну из свободных клеток, примыкающую хотя бы к одной из уже закрашенных; 2) побеждает тот, кто закрасит одну из угловых клеток; 3) первым ходом закрашивать угловую клетку нельзя.

Первый ход делает Оля. Как ей добиться победы?

269. Два маляра Вася и Коля играют в игру: закрашивают клетки квадратной доски 4×4. Первым ходит Вася, затем Коля, затем снова Вася и так далее, до тех пор пока не окажется окрашенным какой-нибудь квадрат 2×2. Кто закрасил последнюю клетку в таком квадрате, тот и проиграл. Кто из маляров сможет выиграть, как бы ни играл соперник?

270. Игра на большой доске. На доске 2008×2008 двое игроков по очереди красят клетки в чёрный цвет. Первый имеет право закрашивать по одной клетке, а второй — «уголок» из трёх клеток. Каждую клетку можно закрашивать один раз. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

а) Кто выигрывает при правильной игре?

б) Изменится ли ответ, если первый имеет право закрашивать квадрат 2×2?

271. Маша и Катя играют в такую игру: по очереди обрывают лепестки у ромашки с 64 лепестками. За один ход разрешается сорвать любое нечётное количество лепестков, меньшее 16, причём запрещается повторять уже сделанные ходы. (Например, если Катя при своём ходе сорвёт 3 лепестка, то в дальнейшем ни Маша, ни Катя сорвать 3 лепестка не имеют права.) Выигрывает тот, кто сорвёт последний лепесток. Начинает Маша. Кто из них выиграет, как бы ни играл соперник?

272. Любимая игра. Два банкира играют в игру: наполняют кошельки монетами. В их распоряжении три кошелька. За один ход можно положить по одной монете в два из трёх кошельков. Выигрывает тот, кто положит в какой-нибудь из кошельков 2010-ю монету. Кто выигрывает при правильной игре: первый или второй? Как он должен играть, чтобы наверняка выиграть?

273. Маша и Лена по очереди пишут цифры двадцатизначного числа, используя только цифры 1, 2, 3, 4, 5. Первую цифру пишет Маша, вторую — Лена, третью — Маша и так далее. Если в итоге полученное двадцатизначное число кратно 9, то выигрывает Лена, а если не кратно, то выигрывает Маша. Кто выиграет при правильной игре: Лена или Маша? Как следует играть победителю?

274. Карточки. На столе лежат 30 карточек, на которых написаны числа 1, 2, 3 и так далее до 30. Маша и Федя по очереди выбирают одну из карточек и бросают её в прорезь игрального автомата. Первоначально на экране автомата записано число 0, а после очередного хода к числу на экране прибавляется число, написанное на карточке. Если после этого получается чётное число, то Федя записывает себе очко, а если нечётное, то очко записывает себе Маша. Первой ходит Маша. Она хочет набрать как можно больше очков. Как она должна играть?

275. Иван-царевич и Кощей нашли кошелёк с 12 монетами номиналом 1, 2, 3, 4, ..., 12 тугриков. Они решили разделить найденные деньги по следующим правилам.

1. Кощей достаёт из кошелька две монеты (какие пожелает) и показывает их Ивану.

2. Иван решает, сколько и каких монет отдать Кощею (одну, две или ни одной). Все монеты, не доставшиеся Кощею, возвращают в кошелёк.

Если сумма в кошельке не кратна 3, делёж заканчивается и Иван забирает все монеты, которые остались в кошельке. Если сумма кратна 3, то процесс повторяется.

а) Может ли Иван действовать так, чтобы наверняка получить больше денег, чем Кощей?

б) На какую наибольшую сумму он может рассчитывать независимо от игры Кощея?

276. Честная игра. Имеется кучка из 262 камней. Оля, Катя и Лариса играют в следующую игру: за один ход каждая может взять только 1, 4 или 10 камней. Первой ходит Оля, второй — Катя и последней — Лариса. Потом опять Оля и так далее. Выигрывает та, которая берёт последний камень. Кто из них может выиграть независимо от игры соперниц?

277. Вычёркиваем числа. В ряд выписаны числа от 1 до 2000. Играют двое, делая ходы поочерёдно. За один ход разрешается вычеркнуть любое из написанных чисел вместе со всеми его делителями. Выигрывает тот, кто зачеркнёт последнее число. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответы, комментарии, решения

214. Ответ: 112431.

В данной последовательности каждое следующее число может быть получено следующим образом: записываем в порядке возрастания все цифры, встречающиеся в предыдущем числе, и после каждой цифры ставим число её повторений в предыдущем числе.

215. Ответ: 22, 25, 26.

Числа, входящие в последовательность, представимы в виде произведения двух простых чисел (необязательно различных) и расположены в порядке возрастания.

216. Ответ: прав Петя.

Заметим, что с каждым шагом количество обрывков увеличивалось на 3, поэтому на каждом очередном шаге их общее число должно при делении на 3 давать остаток 1.

217. Ответ: 102.

Когда мы кладём в пустую шкатулку шесть шкатулок, мы одновременно увеличиваем число пустых шкатулок на 6 (шкатулок «поменьше») и уменьшаем на одну пустую (большую), то есть при каждом таком действии добавляются 5 пустых шкатулок.

Изначально было 18 пустых шкатулок, а стало 88. Следовательно, добавили $88-18=70$ шкатулок. Так как при каждом действии добавлялось по 5 пустых шкатулок, это было сделано $70:5=14$ раз.

Общее количество шкатулок каждый раз увеличивается на 6, поэтому их станет $18+14\cdot 6=102$.

218. Ответ: 4001.

При совершении двух чудес количество волос в бороде Хоттабыча уменьшается на 1. Таким образом, он сможет совершить $2000 \cdot 2 = 4000$ чудес, после чего останется неиспользованным 1 волос.

219. Ответ: 146 100 иголок.

Заметим, что после первых четырёх лет жизни ёлки количество иголок на ней перестало меняться: каждый день 100 иголок вырастало и 100 отмирало. Следовательно, после того как Волшебной ёлке исполнилось 4 года, количество иголок на ней стало равно $1461 \cdot 100 = 146100$ и больше не менялось (так как в четырёх годах 1461 дней).

На рубеже некоторых столетий эта задача имеет другой ответ — 146 000. (В соответствии с григорианским календарем годы, которые оканчиваются на 00 и не кратны 400, не являются високосными. Подробнее см. задачу 346.)

220. Ответ: колония просуществует 200 минут.

Рассмотрим таблицу.

Время (мин)	Число вирусов	Число бактерий
0	1	200
1	2	$2 \cdot 199$
2	2^2	$2^2 \cdot 198$
3	2^3	$2^3 \cdot 197$
...	...	...
t	2^t	$2^t(200 - t)$
...	...	...
200	2^{200}	$2^{200}(200 - 200) = 0$

Следовательно, через 200 минут число бактерий обратится в нуль и колония погибнет.

221. Ответ: а) 3; б) 21; в) 377.

Пусть x — бактерии, возраст которых меньше получаса («молодые» бактерии); y — «старые» бактерии (все остальные).

Тогда число бактерий будет следующим (за единицу времени принято полчаса).

T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
Y	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
Σ	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

Заметим, что если обозначить число бактерий к моменту времени t за u_t, то к моменту времени $t+1$ число бактерий составит

$$u_{t+1} = u_{t-1} + u_{t-1} + u_t - u_{t-1} = u_{t-1} + u_t.$$

В момент $t-1$ рождаются u_{t-1} «молодых» бактерий, каждая из которых породит в дальнейшем одну новую, а также имеются $u_t - u_{t-1}$ «старых» бактерий, каждая из которых порождает одну новую бактерию и умирает.

Получим $u_2 = 3$, $u_6 = 21$, а $u_{12} = 377$.

222. Ответ: $A = 333$; $B = C = 0$; нет.

1. Например, при $A = 333$, $B = C = 0$ в пятой строке одно из чисел будет равно 1998.

2. Из таблицы видно, что в любой строке начиная с четвёртой должно стоять число, кратное трём.

Так как число 1997 на 3 не делится, в пятой строке оно оказаться не может.

	числа		
строки	I	II	III
I	A	B	C
II	$A - B$	$B - C$	$C - A$
III	$A - 2B + C$	$B - 2C + A$	$C - 2A + B$
IV	$3C - 3B$	$3A - 3C$	$3B - 3A$
V	$6C - 3B - 3A$	$6A - 3B - 3C$	$6B - 3A - 3C$

223. Ответ: а) проживёт 4 с; б) проживёт неограниченно долго.

а) Эволюция организма показана на рис. 8–12.

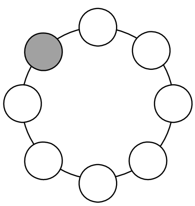


Рис. 8

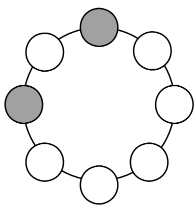


Рис. 9

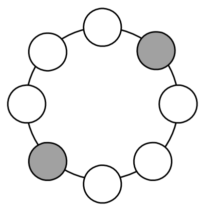


Рис. 10

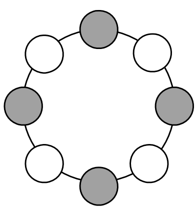


Рис. 11

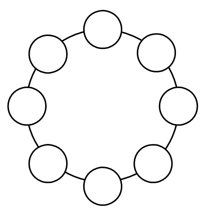


Рис. 12

б) Во втором случае организм живёт неограниченное время. Это можно увидеть, если составить цикл жизни организма (рис. 13–21).

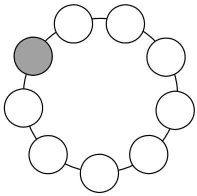


Рис. 13

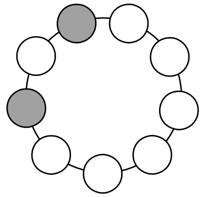


Рис. 14

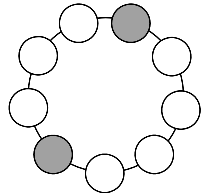


Рис. 15

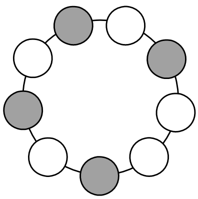


Рис. 16

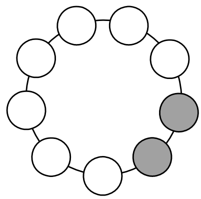


Рис. 17

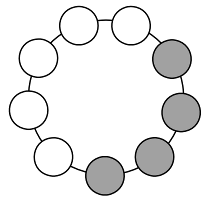


Рис. 18

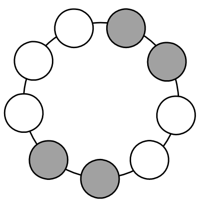


Рис. 19

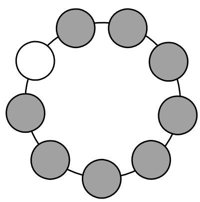


Рис. 20

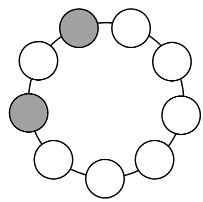


Рис. 21

224. Ответ: см. рис. 22, крестиком показано начало отсчета.

Комментарий. На рис. 23 показан способ получения ответа. Здесь цифрами обозначен порядок выбывания мальчиков.

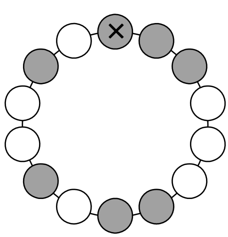


Рис. 22

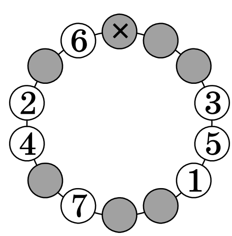


Рис. 23

225. Ответ: сможет.

Например, если срубить 47 раз по 21 голове (итого 987 голов), то при этом не вырастет ни одной. У Змея останется 13 голов. Затем богатырь срубит одну голову, и станет $13-1+10=22$ головы. Затем он срубит 21 голову — останется 1 голова, после чего он срубает и последнюю.

226. Приведём одно из решений.

1. Отбросим цифру 8 (получим 45).

2. Умножим 45 на 2 пять раз (получим 1440), затем дважды отбросим последнюю цифру.

227. Ответ: а) да; б) нет.

а) Перевернём сначала первые три, а потом последние три монеты.

б) Есть три типа «переворачиваний»: перевернуть первые три монеты, средние три или последние три. Первая монета лежат вверх решкой, следовательно, первый тип «переворачиваний» должен быть применён нечётное число раз, последняя монета также лежит вверх решкой, следовательно, третий тип тоже необходимо применить нечётное число раз. После этого средняя монета будет лежать вверх решкой (так как она перевернётся чётное число раз), следовательно, второй тип «переворачиваний» потребуется применить нечётное число раз. Но после всех этих преобразований вторая монета будет лежать вверх решкой. Следовательно, добиться, чтобы все монеты лежали вверх орлом, невозможно.

228. Ответ: нет.

Предположим, что нам удалось выполнить требование задачи. Рассмотрим квадратик 2×2, содержащий плюс, — составную часть квадрата 3×3. Будем писать вместо минусов «-1», а вместо плюсов — «$+1$». Произведение всех чисел в этом квадратике равно -1.

Заметим, что при замене знаков в любом столбце (или в строке) это произведение чисел не меняется. Но по условию во всех клетках должны быть плюсы, то есть произведение должно стать равным 1, что невозможно. Следовательно, для квадрата 3×3 это сделать тоже нельзя.

229. Ответ: верно.

Заметим, что если ручку сейфа повернуть чётное число раз, то она окажется в первоначальном положении, а если нечётное, то изменит положение.

Докажем, что можно изменить положение произвольной ручки, не меняя положения остальных.

Пусть, например, нам требуется изменить положение некоторой ручки X. Для этого будем последовательно поворачивать все ручки, которые находятся с ней в одном столбце и в одной строке. Так как при повороте ручки вместе с ней поворачиваются все ручки, которые находятся с ней в одном столбце и в одной строке, каждая из них повернётся ровно 4 раза — по числу ручек в столбце (строке), и их положение в итоге совпадёт с исходным положением. Также совпадёт с исходным положение ручек, не лежащих с ручкой X в одном столбце (строке), — их положение изменится ровно 2 раза. Ручка, стоящая на пересечении столбца и строки, повернётся 7 раз, а следовательно, изменит свое положение. Далее, последовательно изменяя положение части ручек, откроем сейф.

230. Ответ: можно.

Эту таблицу можно перекрасить за 7 операций. Последовательность действий показана на рис. 24–31.

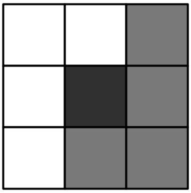


Рис. 24

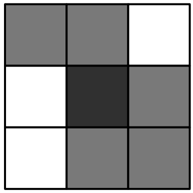


Рис. 25

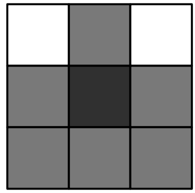


Рис. 26

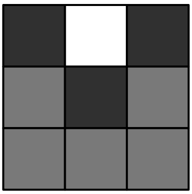


Рис. 27

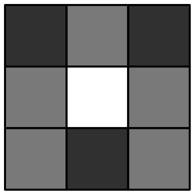


Рис. 28

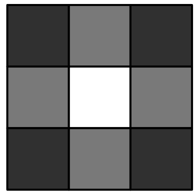


Рис. 29

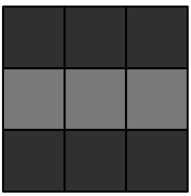


Рис. 30

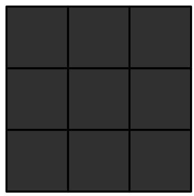


Рис. 31

231. 1. Если есть трёхцветная строка или столбец, то мы можем получить любой другой порядок цветов в ней не более чем за 6 ходов, не затрагивая другие строки или столбцы таблицы, см. рис 32.

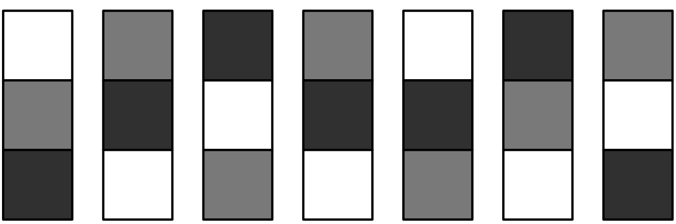


Рис. 32

2. Если в таблице все строки или все столбцы трёхцветные, то из пункта 1 следует, что во второй и

третьей строках (столбцах) можно установить тот же порядок цветов, что и в первой строке (столбце).

В результате получится такая раскраска, как на одном из рисунков — рис. 33 или рис. 34.

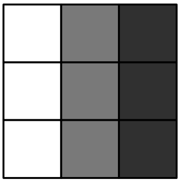


Рис. 33

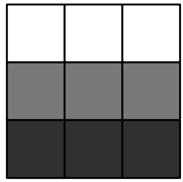


Рис. 34

3. Если каждый из трёх столбцов (строк) окрашен ровно в один цвет, то, меняя цвет второго и третьего столбцов (строк) на цвет первого (первой), получим раскраску таблицы в один цвет.

4. Итого потребуется не более 6 операций, чтобы сделать первый и второй столбцы (строки) одинаковыми. Ещё потребуется не более 6 операций, чтобы сделать первый и третий столбцы (строки) одинаковыми. Затем потребуется не более 2 операций, чтобы сделать вторую и третью строки (столбцы) того же цвета, что и первая (первый).

Всего потребуется не более 14 операций, чтобы сделать таблицу одноцветной.

232. Ответ: да.

Удобно записать ход решения в виде таблицы (изменение чисел показано по столбцам).

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1	1	2	4	3	2	2	4	3	3	3	3	2
2	4	4	4	3	2	2	2	1	1	1	1	0
3	3	3	3	2	1	2	2	1	1	1	1	0
4	4	4	4	3	2	2	2	1	2	4	8	7

Этапы решения: 1) получить четыре двойки; 2) получить нужное число.

233. Ответ: а) можно; б) любые натуральные числа.

а) Вместо того чтобы получать с помощью операций 1, 2 и 3 из числа 4 число 2007, мы попробуем получить из числа 2007 число 4 с помощью обратных действий:

$1'$) вычёркивание цифры 4 в конце;

$2'$) вычёркивание цифры 0 в конце;

$3'$) умножение числа на 2.

При этом будем каждый раз, как только это возможно, применять операцию $1'$ или $2'$, чтобы на каждом шаге постепенно уменьшать наше число. Получим

$$2007 \to 4014 \to 401 \to 802 \to 1604 \to 160 \to 16 \to$$
$$\to 32 \to 64 \to 6 \to 12 \to 24 \to 2 \to 4.$$

Прочитав эту последовательность от конца к началу, мы получим нужный результат.

б) Чтобы получить из числа 4 произвольное натуральное число, поступим аналогично пункту а). Для этого докажем, что из числа N всегда можно получить число 4, применяя операции $1'$, $2'$, $3'$.

Вначале докажем это для произвольного чётного числа. Для этого заметим, что:

1) из числа $10k$ можно получить число k, «обрезав» 0, а затем $2k$;

2) из числа $10k+2$ можно получить $20k+4$, а затем $2k$, «обрезав» 4;

3) из числа $10k+4$ можно получить k, а затем $2k$;

4) из числа $10k+6$ можно получить $20k+10+2$, $40k+20+4$, затем $4k+2$;

5) из числа $10k+8$ можно получить $20k+10+6$, $40k+30+2$, затем $80k+60+4$ и $8k+6$.

Число уменьшается и остается чётным; в итоге мы получим однозначное чётное число, не равное 0.

Затем из полученного однозначного чётного числа можно получить число 4 (подумайте самостоятельно как).

Доказательство для произвольного нечётного числа сведём к предыдущему, предварительно умножив нечётное число на 2.

234. Ответ: а) да; б) да.

Например, так:

а) 8 комбинаций за 7 шагов:

$$000 \to 100 \to 110 \to 010 \to 011 \to$$
$$\to 001 \to 101 \to 111;$$

б) 16 комбинаций за 15 шагов:

$$0000 \to 1000 \to 1100 \to 1110 \to 0110 \to$$
$$\to 0100 \to 0101 \to 0111 \to 0011 \to$$
$$\to 0001 \to 1001 \to 1101 \to 1111 \to$$
$$\to 1011 \to 1010 \to 0010.$$

Можно записать решения и так: пронумеруем все рычаги и будем записывать только те рычаги, которые в данный момент подняты:

$$\text{а) } 1 \to 12 \to 2 \to 23 \to 3 \to 13 \to 123;$$
$$\text{б) } 1 \to 12 \to 123 \to 23 \to 2 \to 24 \to 234 \to 34 \to$$
$$\to 4 \to 14 \to 124 \to 1234 \to 134 \to 13 \to 3.$$

235. Ответ: можно.

Например, см. последовательность на рис. 35—41.

0	1	0	1
1	0	1	0
0	1	0	1
1	0	1	0

Рис. 35

1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
1	0	1	0

Рис. 36

1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	1	0
1	0	0	1

Рис. 37

1	1	1	1
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1

Рис. 38

1	1	1	1
0	0	0	0
0	0	0	0
1	1	1	1

Рис. 39

1	1	1	1
1	1	0	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Рис. 40

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1

Рис. 41

Выделены квадраты 2×2, в которых произошли изменения.

236. Ответ: например,

111 333 112 332 122 232 213 132 312 11

(есть и другие последовательности).

Из трёх цифр можно составить $3^3 = 27$ различных трёхзначных кодов. Запишем искомую последовательность таким образом, чтобы какой-то код был образован первой, второй и третьей её цифрами, другой образован второй, третьей и четвёртой цифрами и так далее. При этом последовательность, включающая в себя все возможные коды, должна содержать не менее 29 цифр (27 цифр — первые цифры каждого из возможных кодов, и ещё две цифры из двух последних цифр последнего кода).

237. Ответ: да, можно.

Допустим, после подключения двух очередных микросхем обе лампочки не горят. Из условия следует, что это возможно в двух случаях: либо обе микросхемы исправные, либо обе неисправные.

Тогда возможен следующий алгоритм выявления неисправных схем.

Берём произвольную микросхему и последовательно тестируем её в паре с каждой из остальных, фиксируя результат.

1. Если выбранная микросхема исправная, то, поскольку исправных микросхем больше половины, не

менее чем в половине испытаний обе лампочки гореть не будут.

2. Если выбранная микросхема неисправная, то, поскольку исправных микросхем больше половины, более чем в половине испытаний по крайней мере одна лампочка будет гореть. Далее, отложив выявленную неисправную микросхему, повторяем процедуру до выявления всех оставшихся.

Таким образом, мы можем всегда узнать, исправна или нет выбранная микросхема.

После выявления первой исправной микросхемы мы сразу сможем выявить все неисправные микросхемы (это все те, с которыми на данной микросхеме будет загораться лампочка).

238. Ответ: всегда.

Первых трёх гномов распределим по трём группам произвольно.

Следующего гнома поместим в группу, где нет гнома, связанного с ним «отношением обиды». Такая группа есть (принцип Дирихле).

Со следующим поступим аналогично. И так далее.

Все гномы будут распределены по группам.

239. Проведём прямую и отложим на ней последовательно три отрезка по 9 см: получим отрезок AB, равный 27 см (см. рис. 42).

От точки A отложим четыре отрезка длиной по 7 см (получим отрезок AC, равный 28 см).

Отрезок BC искомый. Возможны и другие решения.

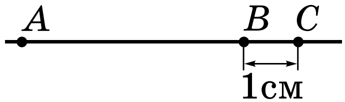


Рис. 42

240. Ответ: а) да; б) да.

а) Для этого достаточно, например, сделать 10 маленьких прыжков вправо и 5 больших влево:

$$9 = -1 + 10 \cdot 7 - 12 \cdot 5.$$

б) Покажем, что кузнечик может попасть в соседнюю точку. Для этого следует сделать 7 малых прыжков в одну сторону и 4 больших в противоположную:

$$7 \cdot 7 - 12 \cdot 4 = 1.$$

Затем, перемещаясь в нужном направлении на 1, кузнечик может попасть в любую точку с целой координатой.

241. Ответ: сможет.

Пусть кузнечик находится в начале координат. Если он сделает два прыжка вперёд и один назад, то он вернётся в исходную точку $(1 + 2 - 3)$, после чего оставшиеся 2004 прыжка можно сгруппировать на последовательные четвёрки прыжков: вперёд-назад-назад-вперёд.

В каждой четвёрке прыжков перемещение равно нулю:

$$n - (n+1) - (n+2) + (n+3) = 0.$$

Следовательно, в итоге кузнечик окажется в исходной точке.

242. Последовательность переливаний видна из таблицы (ёмкости, где получена нужная концентрация, выделены).

Покажем, что во всех банках получен раствор одинаковой концентрации.

Заметим, что после первого шага мы получили два различных раствора вместо трёх, а дальше для создания нового раствора мы берём равные доли каждого из двух.

№ шага	Ёмкости					
	1 л	2 л	3 л	1 л	2 л	3 л
0	1 л	2 л	3 л			
1			3 л			3 л
2	1 л		2 л	1 л		2 л
3		2 л	2 л			2 л
4	1 л	2 л	1 л	1 л		1 л
5		2 л	1 л		2 л	1 л
6		2 л			2 л	2 л
7		1 л			2 л	3 л
8				1 л	2 л	3 л

243. Берём из каждой бочки по $\frac{1}{99}$ части кислоты и наливаем в пустую бочку. Откладываем наполненную таким образом бочку с уже имеющейся в ней кислотой необходимой концентрации. Переходим к оставшимся 99 бочкам. Разливаем одну из них поровну по остальным 98 бочкам. Наливаем в опустошённую на предыдущем шаге бочку по $\frac{1}{98}$ части кислоты из остальных бочек. Откладываем наполненную бочку. Далее поступаем аналогично.

244. С помощью чашечных весов можно получить две кучи песка равного веса. Тогда:

1) разделим 24 кг на две части весом по 12 кг;
2) одну из частей разделим на две части по 6 кг;
3) одну из частей разделим на две части по 3 кг;
4) объединим части весом 3 кг и 6 кг.

Весь оставшийся песок будет весить 15 кг.

245. Ответ: за одно взвешивание.

Положим на весы все оставшиеся монеты (6 на каждую чашку весов).

Если выбранная монета настоящая, то среди оставшихся будет чётное число фальшивых монет, а следовательно, разность весов, показанная стрелкой, будет равна чётному числу.

Если же она фальшивая, то среди оставшихся монет будет нечётное число фальшивых, а разность весов будет равна нечётному числу.

246. Ответ: за три взвешивания.

Покажем, как за три взвешивания выделить кубик весом 1000 г.

Сначала взвешиваем произвольно выбранную пару кубиков. Так как суммы весов двух кубиков уникальны, по результату можно судить, есть ли среди этой пары искомый кубик. Если искомого в этой паре нет, то он находится среди трёх остальных.

Далее возможны два случая.

1. Искомый кубик — один из уже взвешенных. Тогда уберём один из кубиков с весов и выясним, который из них искомый.

2. Искомый кубик — среди трёх других кубиков. Тогда не более чем за два взвешивания мы можем найти искомый кубик, взвесив поочерёдно какие-либо два кубика из трёх.

Почему нельзя обойтись двумя взвешиваниями?

Заметим, что за одно взвешивание мы делим исходное множество кубиков на два подмножества и определяем, в какой из частей находится искомый кубик.

Как бы мы ни разбивали множество на части, после первого взвешивания имеется множество, содержащее не менее трёх кубиков, в котором может находиться искомый кубик. Из трёх кубиков за одно взвешивание выделить искомый кубик возможно не всегда.

247. Ответ: одно взвешивание.

Из первого мешка берём 1 монету, из второго — 2 монеты, из третьего — 4 монеты, из четвёртого — 8 монет.

Если все монеты настоящие, то результат взвешивания — 150 г.

Рассмотрим разность между результатом взвешивания и числом 150. Полученное число можно представить в виде суммы степеней двойки.

Эта сумма единственным образом указывает на номера мешков с фальшивыми монетами по следующей схеме: наличие в сумме того или иного слагаемого (1 в соответствующем разряде двоичной записи указанного числа) показывает наличие фальшивых монет в соответствующем ему мешке.

Например, $15 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 = 1111_2$ — во всех мешках находятся фальшивые монеты.

Или $7 = 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 = 0111_2$ — в первых трёх мешках фальшивые монеты. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

248. Ответ: да, можно.

Выполним два взвешивания:

1) 1 копейка + 2 копейки и 3 копейки;

2) 2 копейки + 3 копейки и 5 копеек.

Если в одном взвешивании весы уравновесились, то фальшивой является монета, не участвовавшая в этом взвешивании.

Предположим, что равновесия нет. Тогда монеты в 1 копейку и 5 копеек настоящие, иначе в одном из взвешиваний было бы достигнуто равенство.

Если из первого взвешивания выяснилось, что монета в 3 копейки легче, тогда либо монета в 3 копейки фальшивая (легче настоящей), либо монета в 2 копейки фальшивая (тяжелее настоящей).

Предположим, что монета в 3 копейки фальшивая (легче настоящей). Это возможно, если во втором взвешивании монета в 5 копеек перевесит.

Если же монета в 2 копейки фальшивая (тяжелее настоящей), то во втором взвешивании монета в 5 копеек окажется легче.

Аналогично рассматриваем случай, когда из первого взвешивания выяснилось, что монета в 3 копейки тяжелее.

249. Выберем какой-нибудь слиток и сравним его вес с двумя другими.

Результаты взвешивания могли быть следующими (вне зависимости от последовательности взвешиваний).

1-й и 2-й слиток	1-й и 3-й слиток	Выводы
$>$	$>$	Вес слитка слева — 5 г: $5>3$, $5>4$ (гном слева). Других вариантов нет.
$=$	$=$	Вес слитка слева — 4 г: $4=3$, $4=5$.
$<$	$<$	Вес слитка слева — 3 г: $3<4$, $3<5$.
$>$	$<$	Вес слитка слева — 4 г: $4<3$, $4<5$.
$>$	$=$	Возможны два случая: $5>3$, $5=4$ или $4>3$, $4=5$. В обоих случаях там, где нет равенства, на «лёгкой» чаше лежит слиток весом 3 г.
$<$	$=$	Возможны два случая: $4<5$, $4=3$ или $3<5$, $3=4$. В обоих случаях там, где нет равенства, на «тяжёлой» чаше лежит слиток в 5 г.

250. Ответ: да, можно.

Первое взвешивание: положим на одну чашу весов зелёную и красную гири, а на вторую — красную и синюю. Рассмотрим два случая.

1. Весы в равновесии.

Достаточно сравнить две красные гири между собой (второе взвешивание). Та гиря, которая лежала на одной чаше с тяжёлой красной, лёгкая, а та, которая лежала на одной чаше с лёгкой красной, тяжёлая.

2. Одна из чаш перевесила.

Тогда красная гиря, которая на ней лежит, тяжёлая. Второе взвешивание: ставим обе красные гири на одну чашу весов, а на вторую чашу ставим зелёную и синюю гири (которые взвешивали в первый раз).

Если перевесили красные гири, то и синяя, и зелёная гири лёгкие.

Если перевесили синяя и зелёная гири, то они обе тяжёлые.

Если весы остались в равновесии, то рассмотрим синюю и зелёную гири. Та из них, которая при первом взвешивании лежала на перевесившей чашке, тяжёлая, а та, что лежала на другой чашке, лёгкая.

251. Ответ: можно.

Первое взвешивание. Положим на каждую чашку весов по 20 монет; если весы в равновесии, то фальшивые монеты в одной из чашек и их вес равен весу двух настоящих монет.

Если равновесия нет, то разобьём монеты с «лёгкой» чашки на две группы по 10 монет: $10л_1$ и $10л_2$, а монеты с «тяжёлой» — на группы $10т_1$ и $10т_2$.

Второе взвешивание. Сравним веса 10$л_1$ и 10$л_2$. Равновесие при втором взвешивании будет означать, что все «лёгкие» монеты настоящие, а фальшивые монеты находятся среди «тяжёлых», то есть две фальшивые тяжелее двух настоящих. Если равновесия нет, то произведём третье взвешивание.

Третье взвешивание. Сравним веса 10$т_1$ и 10$т_2$. Равновесие в этом случае будет означать, что две фальшивые монеты легче двух настоящих. Если же равновесия нет, то взвесим монеты четвёртый раз.

Четвёртое взвешивание. Сравним суммарный вес 10 «лёгких» монет, полученных после второго взвешивания, и 10 «тяжёлых» монет (обе фальшивые монеты находятся среди них), полученных после третьего взвешивания, с остальными 20 монетами.

Результат четвёртого взвешивания даёт ответ на вопрос задачи.

252. Разделим монеты на три группы по четыре монеты в каждой. Сравним на весах две группы монет, а третью отложим в сторону. Возможны два случая.

1. Чашки весов уравновесились.

Тогда все монеты на весах настоящие, а фальшивая монета находится в третьей группе.

Пронумеруем монеты в третьей группе: a_1, a_2, a_3, a_4 — и на втором взвешивании сравним вес монет a_1, a_2, a_3 и любых трёх настоящих монет.

Если весы уравновесились (случай 1а), то a_4 — фальшивая монета и, сравнивая её с настоящей, мы найдём, легче она или тяжелее (третье взвешивание).

Если тяжелее оказалась чашка с настоящими монетами, то фальшивая монета легче (случай 1б).

Если же чашка с настоящими монетами оказалась легче, то фальшивая тяжелее (случай 1в).

Тогда можно найти фальшивую монету, взвесив монеты a_1 и a_2.

2. Одна из чашек перевесила.

Обозначим монеты на тяжёлой чашке через a_1, a_2, a_3, a_4. Если одна из них фальшивая, то она *тяжелее* настоящих.

Монеты на другой чашке обозначим через b_1, b_2, b_3, b_4. Если одна из них фальшивая, то она *легче* настоящей монеты.

Остальные монеты настоящие.

При втором взвешивании поместим на одну чашку монеты a_1, a_2 и b_1, а на вторую — a_3, a_4 и b_2.

Случай 2а. Чашки весов уравновесились.

Тогда фальшивая монета либо b_3, либо b_4 (при этом она легче настоящих). Третьим взвешиванием находим среди них более лёгкую.

Случай 2б. Чашка с монетами a_1, a_2 и b_1 оказалась более тяжёлой, тогда монеты a_3, a_4 и b_1 настоящие. Предположим, что это не так.

Если бы фальшивой была монета b_1, то она должна быть легче настоящей (по результатам анализа первого взвешивания), и тогда чашка с монетами a_1, a_2 и b_1 была бы лёгкой.

Если бы фальшивой была одна из монет a_3 или a_4, то по результатам первого взвешивания она должна быть тяжелее настоящей и на втором взвешивании чашка с монетами a_3, a_4 и b_2 была бы тяжёлой. Противоречие.

Следовательно, фальшивыми могут быть только монеты a_1, a_2 и b_2.

Третьим взвешиванием сравниваем монеты a_1 и a_2. Более тяжёлая монета из этих двух фальшивая. Если же они окажутся одинаковыми по весу, то фальшивая — монета b_2.

Случай 2в. Чашка с монетами a_3, a_4 и b_2 оказалась более тяжёлой.

Рассуждая аналогично предыдущему случаю, получим, что третьим взвешиванием нужно сравнить монеты a_3 и a_4 (ищем более тяжёлую монету, при равенстве чашек весов фальшивой окажется монета b_1).

253. Например, так: разделим шары на четыре группы. В три из них входит шар A (см. рис. 43), одна группа состоит из двух шаров.

Сделаем три измерения, проверив на радиоактивность группы 1, 2 и 3.

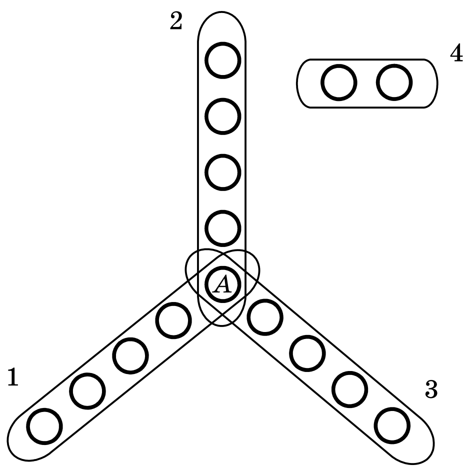


Рис. 43

Возможны следующие случаи (наличие радиоактивности будем обозначать знаком «+», отсутствие — «–»).

Случаи	Группа 1	Группа 2	Группа 3
I	–	–	–
II	+	+	+
III	+	+	–
IV	+	–	–

Имеется несколько симметричных случаев, рассматриваемых аналогично.

Что делать дальше?

Случай I: оба искомых шара в группе 4.

Случай II: шар A радиоактивен.

Ещё один радиоактивный шар можно найти так.

1. Разделим оставшиеся 14 шаров на две группы по 7 шаров и проверим на радиоактивность одну из групп. Если результат отрицателен, то радиоактивный шар в другой группе.

2. Разделим группу, содержащую радиоактивный шар, на две части: в одной — 3, а в другой — 4 шара.

Проверим на радиоактивность одну из частей. В результате выявим, в какой из двух групп радиоактивный шар.

3. Далее делим группу с радиоактивным шаром на две части (либо $2+2$ шара, либо $1+2$). Проводим новое измерение и так далее. Для выявления радиоактивного шара достаточно 4 измерений.

Случай III: радиоактивность нашлась в группах 1 и 2.

Следовательно, в каждой из них находится по одному радиоактивному шару, при этом шар A не радиоактивен (подумайте почему). Далее поступаем аналогично случаю II.

Случай IV: проверим на радиоактивность группу 4. Если в ней выявлена радиоактивность, то в группах 1 и 4 находится по одному радиоактивному шару, которые мы определяем оставшимися тремя измерениями. Если нет, то оба радиоактивных шара в группе 1 (шар A не является радиоактивным) и трёх измерений достаточно, чтобы их найти. Для этого следует проверить на радиоактивность по три шара из каждой группы.

254. Ответ: можно.

0	Вначале было	19	9	7
1	Из каждого числа будем вычитать по 1, пока одно из них не будет равно 1.	13	3	1
2	Удвоим 1 и вновь вычтем из всех трёх чисел 1.	12	2	1
3	Повторим операцию 2.	11	1	1
4	Удвоим оба числа 1 и затем вычитаем по 1 из всех трёх чисел. Так повторяем 10 раз.	1	1	1
5	Вычтем по 1 из всех трёх чисел.	0	0	0

Аналогично можно решить и более общую задачу: вместо чисел 19, 9 и 7 можно взять три произвольных натуральных числа a, b и c.

255. Ответ: а) нет; б) нет.

Раскрасим куб, как показано на рис. 44 и 45.

а) Сумма чисел, записанных в раскрашенных кружочках, всегда на 1 больше, чем сумма в незакрашенных.

б) Сумма чисел, записанных в незакрашенных кружочках, всегда на 2 больше, чем сумма в закрашенных.

За один шаг мы добавляем по 1 в каждую сумму. Следовательно, эти соотношения сохраняются. Тогда добиться равенства всех восьми чисел невозможно.

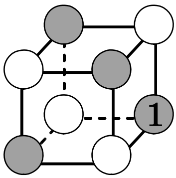


Рис. 44

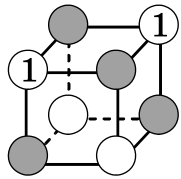


Рис. 45

256. Ответ: да, существует. Например, такая:

5, 5, –13, 5, 5, 5, –13, 5, 5, –13, 5, 5, 5, –13, 5, 5.

257. Ответ: нет, не существует.

Предположим, что такая последовательность существует. Обозначим числа этой последовательности a_1, a_2, ..., a_{17}. Выберем все группы по 11 чисел, сумма которых положительна, и сложим их:

$$S_1 = a_1 + \ldots + a_{11} + a_2 + \ldots + a_{12} + \ldots + a_7 + \ldots + a_{17} =$$
$$= a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 + 6a_6 + 7a_7 + 7a_8 + 7a_9 +$$
$$+ 7a_{10} + 7a_{11} + 6a_{12} + 5a_{13} + 4a_{14} + 3a_{15} + 2a_{16} + a_{17} > 0 .$$

Теперь выберем все группы по 7 чисел, сумма которых отрицательна, и сложим их:

$$S_2 = a_1 + \ldots + a_7 + a_2 + \ldots + a_8 + \ldots + a_{11} + \ldots + a_{17} =$$
$$= a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 + 6a_6 + 7a_7 + 7a_8 + 7a_9 +$$
$$+ 7a_{10} + 7a_{11} + 6a_{12} + 5a_{13} + 4a_{14} + 3a_{15} + 2a_{16} + a_{17} < 0 .$$

Легко заметить, что $S_1 = S_2$. Противоречие.

258. Ответ: могут.

Один из путешественников на мотоцикле отвозит на 50 км вперёд второго, после чего тому останется пройти 10 км и 2 часа времени. Следовательно, второй успеет прийти вовремя. После этого первый возвращается на 40 км назад и ждёт третьего 2 часа (ему необходимо пройти 10 км). После того как третий пешеход подойдёт к мотоциклу, у них останется 1 час времени и 50 км пути до города. Таким образом, они успеют за три часа преодолеть 60 км.

259. Ответ: достаточно взять с собой двух носильщиков.

План путешествия: в первый день питание всех троих (путешественника и двух носильщиков A и B) за счёт запасов носильщика A, который возвращается домой, имея с собой еды на один день. Во второй день питание двоих оставшихся (путешественника и носильщика B) за счёт запасов носильщика B, который возвращается домой, имея еды на два дня. Далее путешественник, имея нетронутый четырёхдневный запас еды, оставшийся путь может пройти в одиночку.

260. Ответ: не может.

Расстояние в 2300 км он может проехать, действуя, например, так.

1. Возьмёт 15 кг топлива, проедет 300 км, оставит 9 кг, вернётся назад.

2. Возьмёт 15 кг топлива, проедет 300 км, оставит 9 кг, вернётся назад.

3. Возьмёт 15 кг топлива, проедет 300 км.

Результат: на отметке 300 км имеем 30 кг топлива.

4. Возьмёт 15 кг топлива, проедет 500 км, оставит 5 кг, вернётся и заберёт остаток топлива.

Результат: на отметке 800 км имеем 15 кг топлива на оставшиеся 1500 км пути.

Может ли путешественник пересечь пустыню шириной более 2300 км? Нет. Рассмотрим точку, которая находится на расстоянии 1500 км от конца его пути.

В этом месте у него должно быть не менее 15 кг топлива. Таким образом, до этой точки он проезжал каждую предыдущую точку пути не менее трёх раз, поскольку 15 кг за один раз не провезти, а всего он сделал нечётное число поездок.

Отложим от этого места ещё 500 км и увидим, что теперь у путешественника должно было быть не менее $30 = 15 + 3 \cdot 5$ кг топлива. 30 кг за два раза не провезти, поэтому любую предыдущую точку он проехал не менее 5 раз.

Отложим ещё 300 км.

На это расстояние потрачено не менее $3 \cdot 5 = 15$ кг топлива.

Таким образом, он не мог проехать более 2300 км.

261. Ответ: 5 литров.

Антон не может сдать все бутылки, иначе не в чем будет нести молоко.

1. Сдав шесть пол-литровых бутылок и одну литровую, Антон получит 1 рубль 10 копеек, что составит стоимость 5 литров молока. Купленные на эти деньги 5 литров молока он может отнести домой в оставшихся литровых бутылках.

2. Убедимся, что больше 5 литров ему унести не удастся.

Если он сдаст не одну литровую бутылку, а больше, то для того, чтобы набрать стоимость хотя бы 5 литров молока, ему потребуется сдать ещё не менее 5 поллитровых бутылок, а ёмкость оставшихся бутылок не будет превышать 4,5 литра (проверяется перебором).

262. Ответ: 1 166 666.

Будем измерять стоимость кефира в «твёрдой валюте» — пустых бутылках. Это возможно потому, что отношение цен кефира и пустой бутылки всё время одно и то же, то есть 7 000 000 рублей соответствуют 7 000 000 пустым бутылкам, что соответствует стоимости 1 166 666 бутылок кефира (без тары).

Оставшиеся 4 пустые бутылки использовать не удастся.

263. Ответ: да, могло.

1. Приведём пример, когда это возможно.

Пусть Волк бежит с постоянной скоростью 7,5 км/ч, то есть пробегает 1 км за 8 минут. Заяц бежит хитрее:

1) первые 0,5 км («быстрый» участок) он пробегает за 2 минуты 1 секунду;

2) вторые 0,5 км («медленный» участок) — за 6 минут;

3) третьи 0,5 км («быстрый» участок) — снова за 2 минуты 1 секунду и так далее;

...

11) последние 0,5 км («быстрый» участок) за 2 минуты 1 секунду.

Следовательно, Волк пробегает всё расстояние за 44 минуты, а Заяц — за $6\text{ минут}\cdot 5 = 30$ минут и $(2\text{ минуты} + 1\text{ секунду})\cdot 6 = 12$ минут и 6 секунд, то есть всего за 42 минуты 6 секунд.

2. Покажем, что Заяц любой километр пробегает ровно за 8 минут и 1 секунду.

Раскрасим дистанцию в 5,5 км в шахматном «порядке» (см. рис. 46). Тёмные участки соответствуют «медленным» участкам, а светлые — «быстрым».

Действительно, каждый промежуток длиной 1 км содержит в себе целиком либо один из «медленных» отрезков (0,5 км), либо один из «быстрых» отрезков (0,5 км).

Последнее означает, что, пробегая километр, он полкилометра бежит быстро (2 минуты 1 секунда), а полкилометра — медленно (6 минут).

Итого: 8 минут 1 секунда.

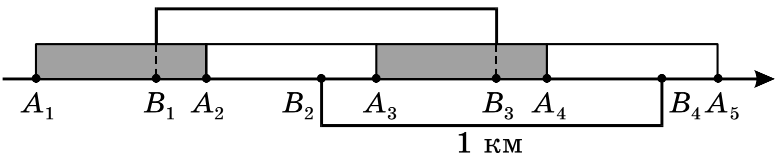


Рис. 46

264. Ответ: 25 кг алмазов и 75 кг золота.

В этом случае он заработает 3000 динаров. Докажем, что больше заработать невозможно.

Вначале заметим, что 5 кг золота имеют тот же объём, что и 1 кг алмазов, но стоят дороже.

Если из мешка, содержащего 25 кг алмазов и 75 кг золота, убрать часть алмазов, то заменить их будет можно таким же количеством золота (по весу) и общая стоимость уменьшится, так как алмазы стоят дороже.

Если же убрать часть золота, то общая стоимость уменьшится, так как вес взятых вместо него алмазов будет в пять раз меньше (иначе — превышение по объёму!). Например, если взять $5x$ кг золота и заменить их на x кг алмазов, то стоимость сокровищ уменьшится на $40x$ динаров.

265. Мартышка может разложить бананы по два так, что разница в весе бананов в каждой паре меньше 100 г.

Очевидно, что в этом случае она сможет выполнить условие задачи, если будет давать Слонёнку и Удаву по одному банану из каждой пары, при этом больший банан из пары давать тому, у кого в данный момент вес полученных бананов меньше.

Действительно, на первом шаге разница в весе меньше 100 г, и на каждом следующем разница в весе не будет больше 100 г.

Но всегда ли это возможно? Докажем, что да.

Будем называть бананы *большими*, если их вес больше 100 г, если же меньше или равен, то *маленькими*. Рассмотрим случаи.

1. Если количество больших бананов чётно, то разница в весе между любыми двумя из них меньше 100 г и их можно разложить на пары требуемым образом. Так же можно поступить и с маленькими бананами.

2. Пусть количество больших бананов нечётно.

а) Если маленький банан всего один, то средний вес больших бананов меньше 101 г, так как

$$(10 - 0{,}020) : 99 < 101.$$

Тогда среди остальных больших найдётся банан, вес которого не превышает 101 г, а значит, его можно объединить в пару с маленьким, а остальные большие разложатся по парам.

б) Если маленьких бананов ровно три, то средний вес больших бананов меньше 103 г, так как

$$(10 - 0{,}06) : 97 < 103,$$

и среди больших бананов также найдётся банан, вес которого не превышает 103 г, а значит, его можно объединить с одним из маленьких (так как вес маленького больше 20 г, разница в весе будет меньше 100 г).

в) Если маленьких бананов ровно 5, то средний вес больших бананов меньше 105 г, так как

$$(10-0{,}1):95<105,$$

и среди больших бананов также найдётся банан, вес которого не превышает 105 г, а значит, его можно объединить с одним из маленьких.

г) Если маленьких бананов 7 или больше, то среди них есть банан весом меньше 100 г (если предположить противное, тогда получится, что все маленькие весят по 100 г, следовательно, все большие весят также по 100 г), отложим его. Тогда выберем среди маленьких два или несколько так, чтобы их суммарный вес был больше 100 г, но меньше 200 г (не используя при этом отложенный банан), и будем обращаться с ними, как с одним большим бананом; тем самым последний большой банан получит пару.

Если после этих операций число маленьких бананов чётно (0 — чётное число), то разложим их на пары.

Если число маленьких бананов нечётно, тогда разложим их на пары, не используя отложенный банан. Затем отложенный банан отдадим тому, кто съел меньше (даже если до этого момента они съели поровну бананов, всё равно итоговая разница будет меньше 100 г).

266. Ответ: да, может.

Для этого можно «зациклить ситуацию», например, так.

1. Дождаться, когда на экране появится число 531. Оно появится, так как

$$123+102=225,\ 225+102=327,$$

$$327+102=429,\ 429+102=531.$$

Затем, переставив в нём цифры, получить число 135.

2. Затем «предоставить ход компьютеру»:

$$135 + 102 = 237,$$

переставив цифры в числе 237, вновь получить число 327 и так далее. Ход игры можно записать следующим образом (ходы Феди закрашены):

1) 123; 2) 225; 3) 327; 4) 429; 5) 531; 6) 135; 7) 237; 8) 327 и так далее.

267. Ответ: выигрывает Баба-яга.

Первым ходом она берёт один гриб, уравнивая кучи, а на каждом последующем ходу берёт из одной кучи столько же грибов, сколько перед этим взял Кощей из другой.

268. Например, так.

1. Первым ходом Оля закрашивает центральную клетку.

2. Затем Оля закрашивает клетки, центрально-симметричные тем, которые закрасил Коля, до тех пор пока Коля не закрасит клетку, соседнюю с угловой.

3. Оля делает выигрышный ход.

269. Ответ: Коля.

Обозначим клетки доски буквами, как показано на рис. 47. Стратегия Коли будет заключаться в следующем. После хода Васи (например, в клетку, обозначенную буквой А) Коля делает ход в клетку, обозначенную той же буквой.

A	B	C	D
E	F	G	H
A	B	C	D
E	F	G	H

Рис. 47

Коля выиграет, так как если он своим ходом закрасит какой-нибудь квадрат 2×2, то это будет означать, что Вася предыдущим ходом закрасил какой-нибудь квадрат 2×2.

270. Ответ: а) выигрывает второй игрок; б) не изменится.

а) Выигрышная стратегия: разбив большой квадрат на квадратики 2×2, второй игрок, после того как первый закрасит одну клетку в одном из квадратиков 2×2, «докрашивает» его.

Очевидно, что тогда последний ход всегда останется за вторым игроком.

б) Выигрышная стратегия: своим ходом второй игрок должен создать себе в одном из углов доски место для хода (см. рис. 48). Далее игра идёт своим чередом.

Заметим, что если у первого игрока есть ход, то есть ход и у второго игрока. Даже если в остальной части доски последний ход сделает первый игрок, то на доске есть место для хода второго игрока.

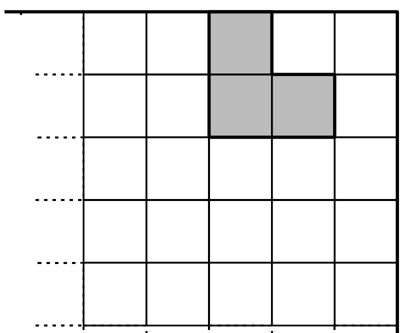


Рис. 48

271. Ответ: выиграет Катя.

По условию в игре есть ровно 8 разрешённых ходов: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15. Заметим, что

$$1+3+5+7+9+11+13+15=64\,.$$

Поэтому независимо от того, как сложится игра, она закончится тогда, когда будут сделаны по разу все 8 ходов, и тогда последний ход достанется Кате.

272. Ответ: выиграет второй.

Стратегия: второй банкир повторяет ходы первого.

После хода второго во всех кошельках становится чётное число монет, значит, в конце концов именно он положит в один из кошельков 2010-ю монету.

Получается, что после каждого хода первого в каждом кошельке будет нечётное количество монет. Его очередная монета при правильной игре второго не может быть 2010-й в кошельке.

273. Ответ: выиграет Маша.

Первый ход Маши: цифра 1, 2 или 3.

Далее любой ход Лены Маша «дополняет» до 6, в результате чего к последнему ходу получается число, сумма цифр которого равна $9\cdot 6+x=54+x$, где x — цифра, записанная на первом ходу. Последним ходом Лена может написать цифру y, где $y=1$, 2, 3, 4 или 5. Поскольку 54 кратно 9, число $54+x+y$ будет меньше 63, а значит, не кратно 9.

Таким образом, при правильной игре выиграет Маша.

274. Ответ: Маша первым ходом опускает карточку с нечётным числом (одно очко), после чего берёт карточки той же чётности, что и Федя.

При такой стратегии Федя добавляет себе очки только «нечётными» ходами (когда Федя берёт карточку с нечётным числом), которых он сможет сделать не более 7. Маша своими ходами очков Феде не добавляет.

Федя может обеспечить себе 7 очков, если будет брать карточки той же чётности, что и Маша, до тех пор пока это возможно. При этом он сделает не менее 7 «нечётных» ходов, а значит, наберёт не менее 7 очков.

275. Ответ: а) да, б) 49 тугриков.

Всего в кошельке 78 тугриков, и это число кратно 3.

а) Если Кощей показывает Ивану монету, не кратную 3, то Иван отдаёт её Кощею, а другую монету возвращает в кошелёк. Сумма оставшихся монет будет не кратна 3, и все оставшиеся монеты забирает Иван (при этом он выигрывает).

Кощею требуется как можно дольше доставать только монеты, кратные 3, поэтому первые два хода Кощей показывает Ивану пары монет, кратных 3.

За эти два хода Иван три монеты, кратные 3, отдаёт Кощею, а одну возвращает в кошелёк. На третьем ходу Кощей может показать либо одну монету, кратную 3, и одну, не кратную 3, либо две монеты, не кратные 3.

В худшем случае (для Ивана) Кощей получит монеты в 6, 9 и 12 тугриков и монету в 11 тугриков. Итого: 38 тугриков. При этом Иван получит больше — не менее 40 тугриков.

б) Если среди первых двух монет хотя бы одна не кратна 3, то Иван отдаёт её Кощею и получает не менее $78-11=67$ тугриков.

Если среди первых двух монет обе кратны 3, то Иван отдаёт Кощею монету меньшего номинала.

Например, если Кощей покажет $12+9$ тугриков, то получит 9 тугриков, а 12 тугриков Иван вернёт в кошелёк.

Если второй раз Кощей покажет $12+6$ тугриков, то получит 6 тугриков, а 12 тугриков Иван вернёт в кошелёк.

Если третий раз Кощей даст $12+3$ тугриков, то получит 3 тугрика, а 12 тугриков Иван вернёт в кошелёк. Таким образом, у Ивана сохраняется монета 12 тугриков.

В четвёртый раз Кощею выгодно дать $12+11$ (наибольшая монета, не кратная 3) тугриков, и он получит монету 11 тугриков.

Итого 29 тугриков достанется Кощею. Ивану достанется 49 тугриков.

276. Ответ: Оля.

После каждого хода остаток от деления количества камней на 3 «уменьшается» на 1. Следовательно, как бы ни ходили девочки, только после хода Оли количество оставшихся камней кратно 3.

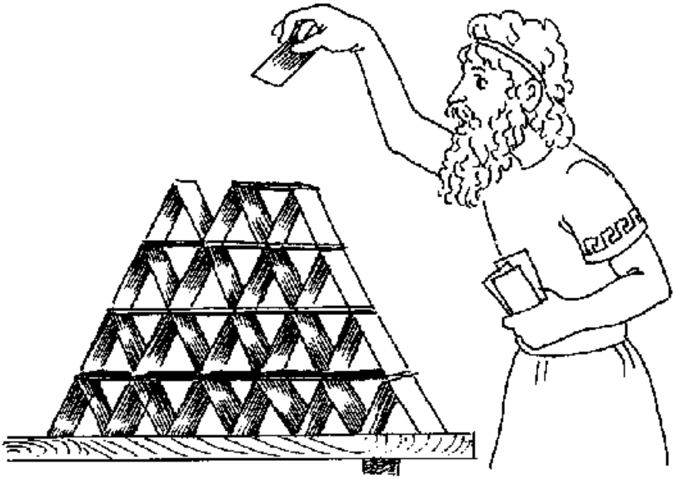
277. Ответ: выигрывает первый.

Заметим сразу, что партия не может закончиться ничьей, так как кто-то своим последним ходом зачеркнёт последнее число.

Предположим, что у первого отсутствует выигрышная стратегия. Тогда у второго есть выигрышная стратегия.

В частности, такая стратегия существует, если первый игрок первым ходом вычеркнет 1. Если второй игрок своим первым ходом вычёркивает некоторое число вместе с его делителями и в дальнейшем выигрывает, то первый игрок мог вычеркнуть своим первым ходом то число, которое вычеркнул второй игрок своим первым ходом. Это возможно, так как 1 является делителем любого натурального числа.

Глава V



Геометрические мотивы

ГЛАВА V

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МОТИВЫ

На клетчатой бумаге

278. Как разрезать фигуру (см. рис. 1) по линиям сетки на три равные части?

279. Четыре части. Разделите фигуру (см. рис. 2) по линиям сетки на четыре равные части так, чтобы в каждой из частей было по одной отмеченной точке.

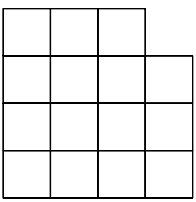


Рис. 1

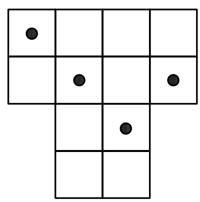


Рис. 2

280. Дачные участки. Требуется разбить участок земли (см. рис. 3) на 8 одинаковых дачных участков. Границы участков должны проходить по линиям сетки, на каждом участке должен располагаться домик.

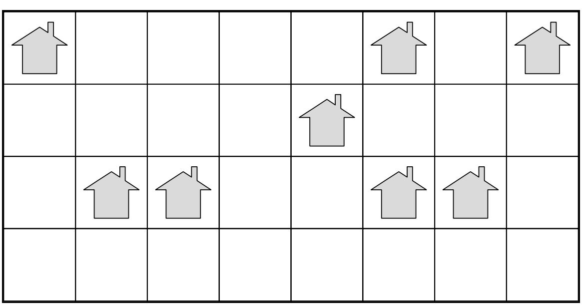


Рис. 3

281. Упорный Вася хочет из клетчатой доски 8×8 вырезать 12 прямоугольников 1×2 так, чтобы из оставшейся части доски невозможно было вырезать прямоугольник 1×3. (Резать можно только по линиям сетки.) И у него это получилось! Нарисуйте, как он мог это сделать.

282. Разрежьте фигуру по линиям сетки:

а) на четыре равные части (см. рис. 4);

б) на две равные части (см. рис. 5).

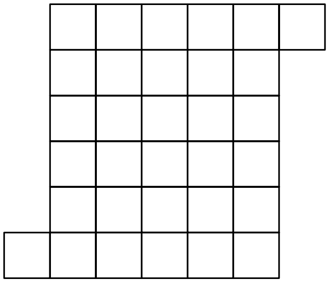


Рис. 4

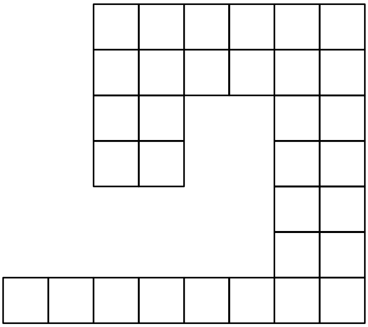


Рис. 5

283. Разрежьте фигуру (см. рис. 6) на три равные части по линиям сетки.

284. Закрасьте внутри фигуры (см. рис. 7) одну клетку и незакрашенную часть разрежьте по линиям сетки на две одинаковые части.

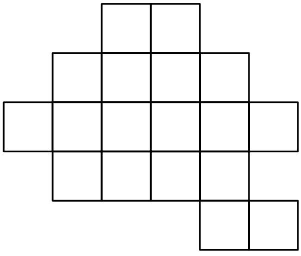


Рис. 6

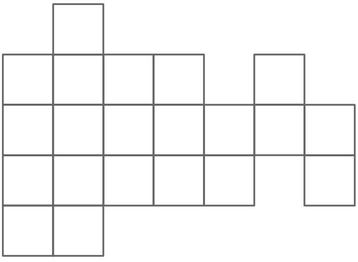


Рис. 7

285. Квадрат. Закрасьте несколько клеток квадрата 4×4 так, чтобы:

а) любая закрашенная клетка имела общую сторону ровно с тремя не закрашенными, а любая не закрашенная — ровно с одной закрашенной;

б) в каждой строке, в каждом столбце и на каждой из двух больших диагоналей было по две закрашенные клетки.

286. Да или нет? а) Можно ли закрасить некоторые клетки квадрата 6×6 так, чтобы каждая клетка граничила ровно с одной окрашенной клеткой? б) Тот же вопрос для квадрата 7×7.

287. Да или нет? а) Каждую клетку таблицы 20×15 красят в один из двух цветов: белый или чёрный. Можно ли их окрасить так, чтобы у каждой клетки были ровно две соседние клетки другого цвета? б) Тот же вопрос для таблицы 20×16. (Соседними будем считать клетки, имеющие общую сторону.)

288. Клетки в квадрате. Можно ли отметить некоторые клетки квадрата 7×7 так, чтобы каждая клетка граничила ровно с тремя отмеченными клетками? Считается, что две клетки имеют общую границу, если у них есть хотя бы одна общая точка.

289. В квадрате 8×8 закрашено 17 клеток. Может ли оказаться так, что никакие две закрашенные клетки не граничат даже в одной точке?

290. Большая клетчатая доска. Можно ли заполнить клетчатую доску 2000×2000 крестиками и ноликами так, чтобы ни на одной диагонали, вертикали или горизонтали нельзя было встретить три крестика или три нолика подряд?

291. Требуется передвинуть каждую из пяти фишек (см. рис. 8) на соседнюю клетку так, чтобы в итоге в каждой строке, каждом столбце и на каждой диагонали оказалось не более одной фишки. Покажите, как это сделать (клетки называют соседними, если они имеют общую сторону).

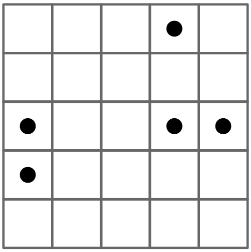


Рис. 8

292. Пол в зале. Можно ли выложить пол размером 20×20, используя для этого четыре плитки размером 1×1, восемь плиток размером 2×2, двенадцать плиток размером 3×3 и шестнадцать плиток размером 4×4?

293. Тетрамино. Можно ли покрыть клетчатую доску 10×10 прямоугольными плитками размером 1×4?

294. Облицовка стены. Можно ли прямоугольную стену размером 1998×1999 покрыть плитками размером 1×4 и 2×2?

295. Можно ли сложить прямоугольную стену размером $20\times15\times14$ из блоков размером $3\times5\times10$?

296. Пентамино — фигура, составленная из пяти одинаковых квадратов, «склеенных» по стороне. Всего существует 12 различных видов пентамино (см. рис. 9).

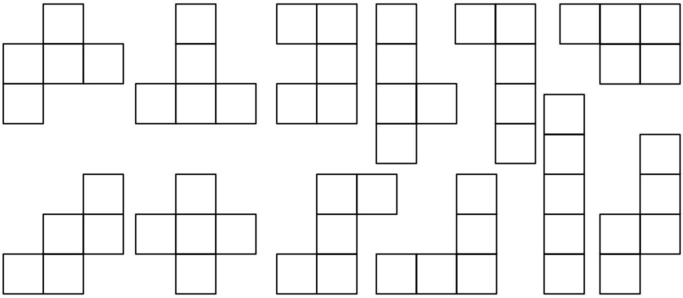


Рис. 9

Вася сумел составить из полного набора пентамино шесть фигур (см. рис. 10), причём каждую фигурку пентамино использовал ровно один раз. Как ему это удалось? (Фигурки можно переворачивать.)

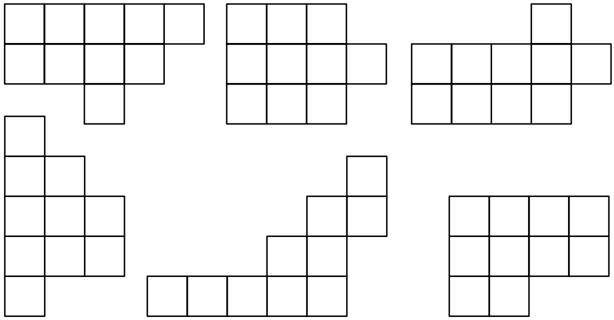


Рис. 10

В шахматном порядке

297. Кони. Какое наибольшее число шахматных коней можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

298. Прямая. На шахматной доске проведена прямая. Какое наибольшее число клеток шахматной доски она может пересечь?

299. Цепочка из плиток. Можно ли сложить замкнутую цепочку из 1993 квадратных плиток? Пример замкнутой цепочки см. на рис. 11.

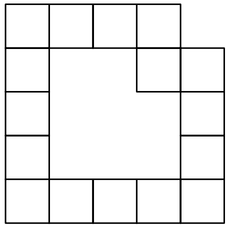


Рис. 11

300. Шахматная фигура «Хромой король» может ходить на одну клетку вверх, или на одну клетку вправо, или на одну клетку по диагонали влево вниз. Может ли «Хромой король», начиная из левого нижнего угла доски 8×8 клеток, обойти всю доску, побывав на каждой клетке ровно по одному разу?

301. Как разрезать доску? На шахматной доске отмечены 4 клетки (см. рис. 12). Разрежьте её на четыре равные части так, чтобы на каждой из этих частей было ровно по одной отмеченной клетке.

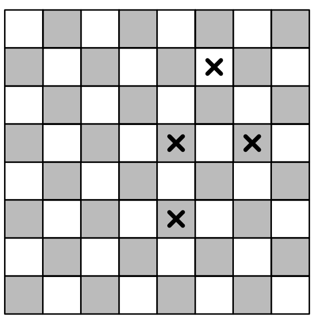


Рис. 12

302. Фигуры на доске. На шахматной доске (см. рис. 13) расположены фигуры (не пешки!). В некоторых клетках написаны числа, которые соответствуют количеству фигур, «атакующих» эту клетку. Определите, какие фигуры стоят на доске, и восстановите позицию.

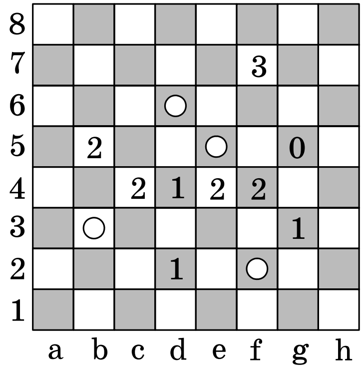


Рис. 13

Измерения на плоскости

303. Измерение углов. В некоторый момент времени Таня измерила транспортиром угол между часовой и минутной стрелками часов и обнаружила, что он равен α градусов. Через полчаса Таня вновь измерила угол между часовой и минутной стрелками и вновь обнаружила, что он равен α градусов. Какие значения может принимать α?

304. Измерение отрезков. Имеется линейка без делений длиной 13 см. Сколько промежуточных делений требуется нанести на линейку, чтобы ею можно было измерить все «целые» расстояния от 1 до 13 см? Число делений должно быть минимальным.

Разрезания на прямой

305. Белоснежка и семь гномов делят 5 одинаковых яблок на восьмерых. За один раз Белоснежка может отрезать от яблока любую его часть. Хватит ли для этого 7 разрезов?

На плоскости

306. Четыре части. Разрежьте квадрат на четыре части так, чтобы каждая часть соприкасалась с тремя остальными. Части соприкасаются, если у них есть общий участок границы.

307. Разрежьте квадрат со стороной 8 см на семь прямоугольников, каждый из которых имеет периметр 16 см. Не забудьте указать размеры полученных прямоугольников.

308. Ковёр. Разрежьте ковёр 3×12 на две равные части так, чтобы из них можно было составить ковровую дорожку 2×18. Ответ проиллюстрируйте рисунком.

309. Из 15 шариков можно сложить равносторонний треугольник (см. рис. 14), но нельзя сложить квадрат — одного шарика не хватает (см. рис. 15). Из какого количества шариков, не превосходящего 50, можно сложить как треугольник, так и квадрат?

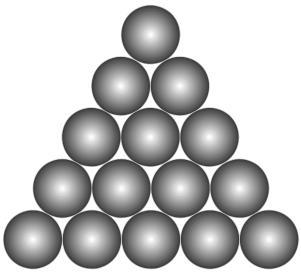


Рис. 14

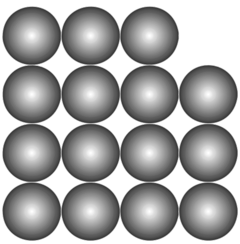


Рис. 15

310. Двое играют в игру. В квадрате из точек (рис. 16) они по очереди обводят по одной точке.

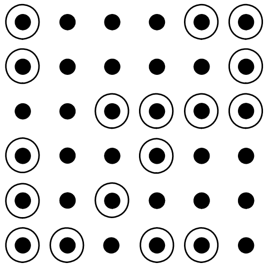


Рис. 16

Проигрывает тот, кто обводит четвёртую вершину квадрата, состоящего из уже обведённых точек. На рис. 17 приведён пример: крестиком отмечены точки, обведение которых будет означать проигрыш. На рис. 16 укажите хотя бы один ход, который не приведёт к проигрышу. Сколько таких ходов существует?

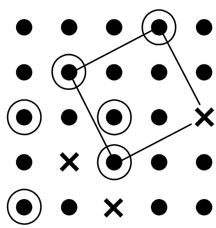


Рис. 17

311. Прямоугольники. Есть прямоугольники вида 1×1, 1×2, ..., 1×2009.

а) Можно ли из них сложить прямоугольник со сторонами больше единицы?

б) Можно ли из них сложить квадрат?

312. Разделите квадрат 13×13 на пять прямоугольников так, чтобы все десять чисел, выражающие длины сторон прямоугольников, были различными целыми числами.

313. Имение маркиза Карабаса имеет форму прямоугольника (см. рис 18). Часть участка занимает лес (выделен тёмным), остальное — пастбища. Чего у маркиза больше — леса или пастбищ?

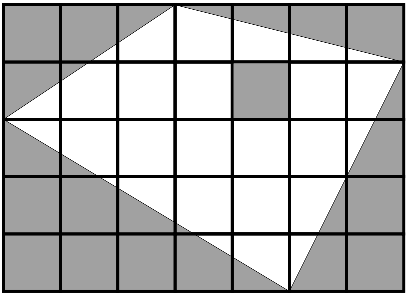


Рис. 18

314. Старый сюжет. В вашем распоряжении квадратный лист бумаги со стороной 20 см. Требуется вырезать квадрат площадью 80 см^2. Лист можно перегибать, а затем разрезать ножницами по линиям сгиба.

315. Задача портного. Может ли портной из куска клетчатой ткани размером 3×3 (площадь каждой клетки 1 дм^2) вырезать коврик в виде квадрата, площадь которого — 5 дм^2, пользуясь только линейкой и ножницами?

316. Два ковра. В два противоположных угла квадратной комнаты площадью 64 м^2 положили одинаковые квадратные ковры. Оказалось, что ровно четверть комнаты покрыта ковром в два слоя. Какова площадь каждого ковра? Ответ объясните.

317. Четыре разреза. Можно ли разрезать квадрат 4 разрезами (по прямым линиям) на 2 треугольника и 8 четырёхугольников? Если можно, приведите пример, если нет, объясните почему.

Расположения на окружности

318. За круглым столом расположились 30 человек, 26 из них носят имя Саша. В полночь каждый из них загадал одно желание, но исполнились желания только у тех, кто сидел между двумя Сашами. а) Какое наименьшее количество желаний могло исполниться? б) Какое наибольшее количество желаний могло исполниться?

Расположения на плоскости

319. Точки и отрезки. Нарисуйте 8 точек и соедините их отрезками так, чтобы отрезки не пересекались и из каждой точки исходило ровно 4 отрезка.

320. Начертить план. Король хочет построить шесть крепостей и соединить каждые две из них прямой дорогой. Помогите королю: начертите такую схему расположения дорог и крепостей, чтобы на ней было только три перекрёстка и на каждом из них пересекалось ровно две дороги.

321. Лабиринт. Лабиринт состоит из семи пронумерованных дорожек (см. рис. 19). Требуется окрасить каждую из дорожек в какой-либо цвет, причём ни на одном перекрёстке не должны пересекаться дорожки одинакового цвета. Какой минимальный набор красок необходим и какие дорожки можно окрасить одной и той же краской?

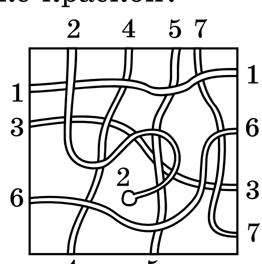


Рис. 19

322. В Ледяном дворце Снежной Королевы стояло 6 ёлок, каждые две из которых соединены гирляндой из цветной бумаги (белой, красной, зелёной, жёлтой или синей).

а) Могло ли так быть, чтобы от каждой ёлки отходили гирлянды каждого из 5 цветов?

б) Если бы ёлок было 13, а цветов 12, могло ли так быть, чтобы от каждой ёлки отходили гирлянды каждого из 12 цветов?

323. Просьба Снежной Королевы. Однажды Снежная Королева попросила Деда Мороза расставить в Ледяном дворце 7 ёлок так, чтобы среди любых трёх из них нашлись две на расстоянии 10 шагов друг от друга. Выполнима ли просьба Снежной Королевы?

324. Точки и окружности. На плоскости расположено 200 точек. Существует ли окружность, внутри которой расположено ровно: а) 3; б) 100 точек?

Из проволоки

325. Сетка. Можно ли сетку 4×4, изображённую на рис. 20, сделать: а) из 8 кусков проволоки, каждый из которых имеет длину 5; б) из 5 кусков проволоки, каждый из которых имеет длину 8? Проволоку можно сгибать, но нельзя разрезать.

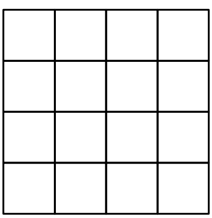


Рис. 20

326. Контуры. На столе лежат шесть непересекающихся контуров из проволоки, частично накрытые листом бумаги (см. рис. 21). Известно, что из толстой медной проволоки сделаны три контура, а ещё три — из тонкой алюминиевой, причём один из контуров закрыт полностью, а пять других частично видны. Какой контур закрыт полностью, алюминиевый или медный? Свой ответ проиллюстрируйте рисунком, показывающим расположение всех шести контуров.

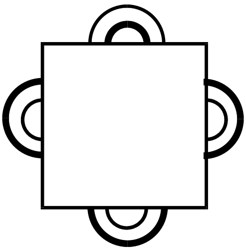


Рис. 21

327. Спереди, сверху, сбоку. Из проволоки сделали замкнутую пространственную ломаную. На рис. 22 изображён вид спереди, вид сбоку и вид сверху.

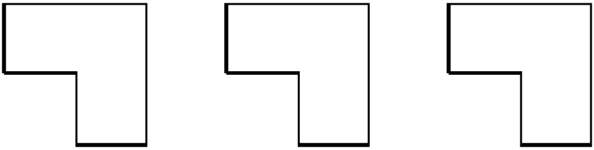


Рис. 22

Нарисуйте такую ломаную.

328. Каркас из проволоки. Можно ли из 199 кусков проволоки, длины которых равны соответственно 1, 2, 3, ..., 199 см, сделать: а) каркас куба с целочисленными сторонами; б) каркас прямоугольного параллелепипеда с целочисленными сторонами?

В пространстве

329. Четыре стакана. Можно ли расставить на столе четыре одинаковых стакана (см. рис. 23) так, чтобы все попарные расстояния между донышками были равны? За расстояния между донышками приняты расстояния между их центрами.

330. Нестандартные игральные кубики. Три одинаковых кубика поставили друг на друга (см. рис. 24). Чему может быть равна сумма очков на всех шести горизонтальных гранях?

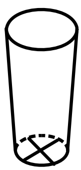


Рис. 23

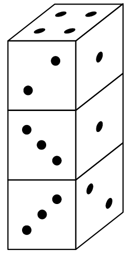


Рис. 24

331. Плитки. Имеются плитки трёх цветов: красного, синего и белого. Требуется обклеить ими грани кубика так, чтобы на каждую грань было наклеено по 4 плитки (см. рис. 25) и плитки с общей стороной были покрашены в разные цвета. Приведите пример такой раскраски. Сколько плиток каждого цвета может потребоваться для этого?

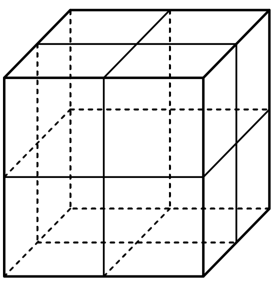


Рис. 25

332. Большой куб склеен из маленьких деревянных кубиков. В нём просверлили 6 сквозных отверстий параллельно рёбрам куба (см. рис. 26). Сколько маленьких кубиков осталось неповреждёнными?

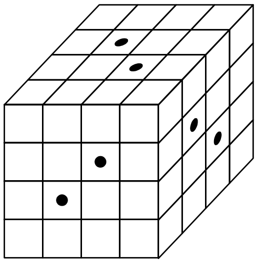


Рис. 26

333. Непрозрачный куб. Имеется достаточное количество единичных кубиков, причём некоторые кубики прозрачны, некоторые нет. Из них требуется сложить куб с ребром 5. Сколько непрозрачных кубиков следует взять и как их расположить, чтобы при взгляде на куб со стороны любой из граней он казался непрозрачным?

334. Можно ли раскрасить рёбра додекаэдра (см. рис. 27) в два цвета так, чтобы по рёбрам каждого цвета можно было пройти из любой вершины в любую другую?

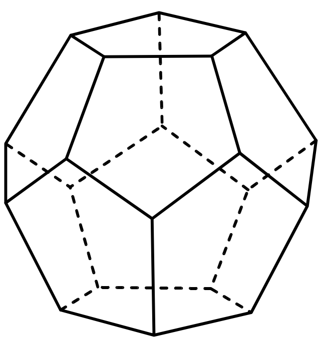


Рис. 27

335. Разрезание в пространстве. Можно ли плиту размером $8 \times 8 \times 27$ разрезать на четыре части и затем сложить из них куб?

336. Оклейка куба. Вася оклеил (без наложений и разрывов) грани куба $5 \times 5 \times 5$ бумажными полосками 2×1, причём некоторые полоски оказались согнуты пополам (остальные полоски не согнуты). Каждая полоска покрывает ровно две клетки. Могло ли число согнутых полосок оказаться чётным?

Пути обхода

337. Лабиринт. По пути в пещеру с сокровищами Али-Баба должен пройти лабиринт (см. рис. 28), двери в котором пронумерованы. Чтобы пройти через дверь, он должен обладать ключом, номер которого совпадает с номером на двери, при этом Али-Баба может взять с собой только три ключа. Помогите ему попасть в пещеру: укажите, какие ключи и в каком порядке необходимо использовать. Через каждую дверь можно проходить только один раз, возвращаться и менять ключи нельзя.

Ключи

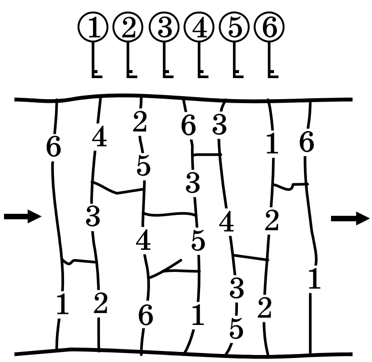


Рис. 28

338. Царь Горох объявил, что хочет выдать замуж дочь — Василису Прекрасную. Собрались на царский двор принцы да королевичи. И сказал им царь: «Есть у меня охотничий домик (см. рис. 29), в нём пять комнат. Кто сможет обойти весь домик, пройдя через каждую дверь ровно один раз, тот и получит царевну в жёны!» Можно ли выполнить условие Царя Гороха?

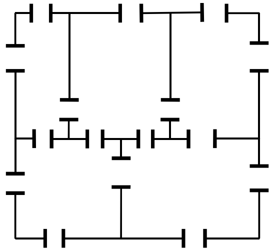


Рис. 29

339. Кладовая Морского Царя состоит из 36 треугольных комнат, соединённых проходами (см. рис. 30). Привёл Морской царь купца Садко в угловую комнату и сказал: «В каждой комнате моей кладовой лежит по одной жемчужине. Собирай жемчужины, но помни, что в любой из комнат ты сможешь побывать не более одного раза. Если же ты выйдешь из кладовой, то войти в неё уже не сумеешь». Какое наибольшее количество жемчужин может собрать Садко?

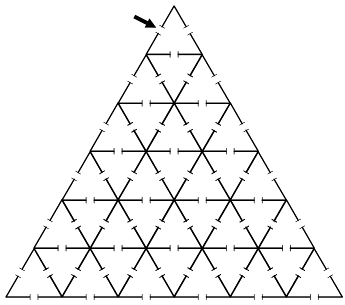


Рис. 30

Как лучше?

340. Постройка школы. Расстояние между двумя деревнями 3 км, причём в Простоквашино живёт 300 школьников, а в Матроскино — 200. Где следует построить школу, чтобы сумма расстояний, пройденных школьниками по дороге в школу, была как можно меньше?

341. Таможни султана. Али-Баба возвращается из пещеры сокровищ (точка A, см. рис. 31) домой (точка E) с мешком, в котором 100 000 золотых монет.

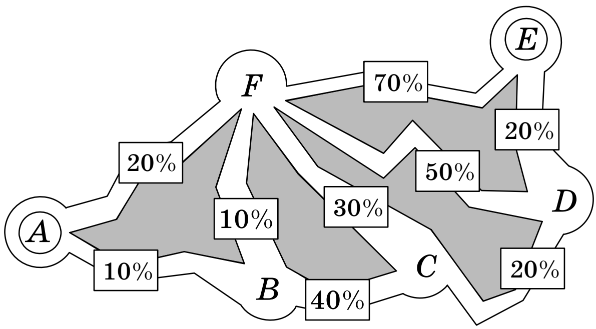


Рис. 31

На дорогах расположены таможни (на плане — прямоугольники), на которых придётся платить таможенный сбор (процент от суммы, провозимой через таможню). Помогите Али-Бабе привезти домой как можно больше золотых монет. Укажите: а) по какому маршруту ему выгоднее ехать; б) какую наибольшую сумму он может привезти.

Разные задачи

342. Не теряй направления. Из Москвы вылетел самолёт, который пролетел 300 км на юг, потом 300 км на запад, 300 км на север и 300 км на восток. Где он оказался: южнее Москвы, севернее Москвы или на той же широте? Восточнее Москвы, западнее Москвы или на той же долготе?

343. Лягушка прыгала с кочки на кочку так, что каждый последующий прыжок был длиннее предыдущего. Укажите возможный маршрут лягушки на плане (см. рис. 32), если известно, что на каждой кочке она побывала ровно один раз (1 — начало пути, 2 — вторая кочка, 3 — третья, ..., 8 — конец пути).

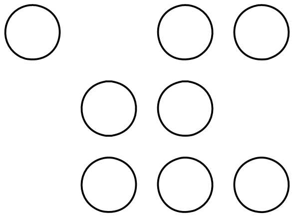


Рис. 32

344. Кодовый штамп. На любом почтовом конверте есть индексная сетка и образец записи цифр почтового индекса (см. рис. 33). Эта форма упрощает их распознавание автоматом с целью облегчения сортировки писем. Автомат проверяет каждую цифру индекса в отдельности. Какое количество трафаретных линий необходимо и достаточно проверить автомату, чтобы определить цифру? Какие именно линии необходимо проверить?

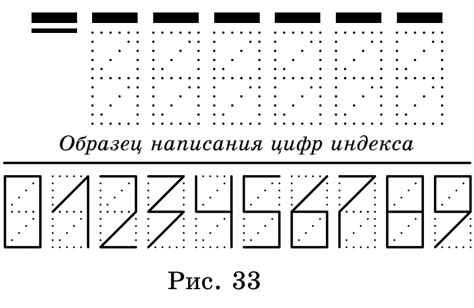


Рис. 33

Ответы, комментарии, решения

278. Ответ: например, см. рис. 34.

279. Ответ: см. рис. 35.

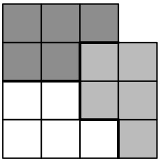


Рис. 34

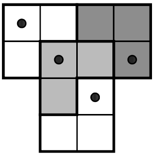


Рис. 35

280. Ответ: см. рис. 36.

281. Ответ: см. рис. 37.

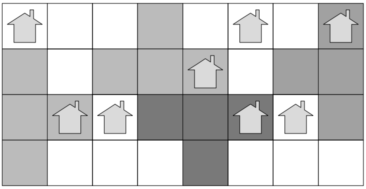


Рис. 36

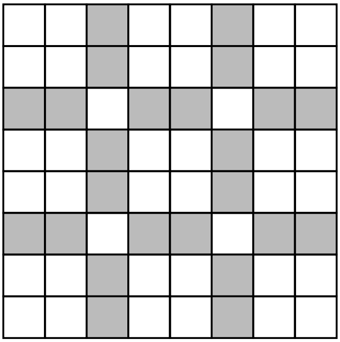


Рис. 37

282. Ответ: а) см. рис. 38; б) см. рис. 39.

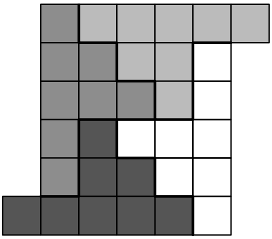


Рис. 38

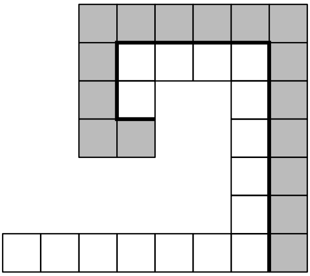


Рис. 39

283. Ответ: см. рис. 40.

284. Ответ: см. рис. 41

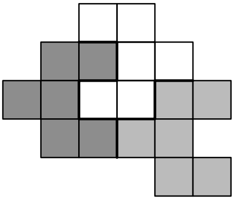


Рис. 40

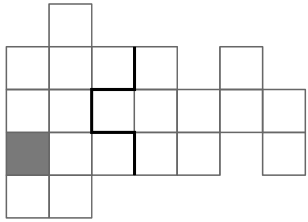


Рис. 41

285. Ответ: а) см. рис. 42; б) см. рис. 43.

286. Ответ: а) можно; б) нельзя.

а) Например, см. рис. 44. Возможны и другие примеры.

б) Заметим, что любая закрашенная клетка, граничащая с диагональю, граничит с двумя клетками на диагонали (см. рис. 45). Следовательно, на диагонали должно быть чётное число клеток. Противоречие.

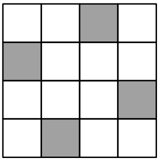


Рис. 42

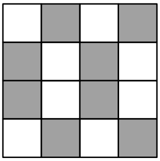


Рис. 43

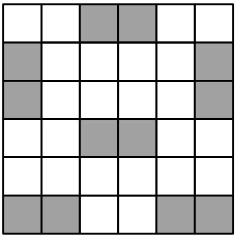


Рис. 44

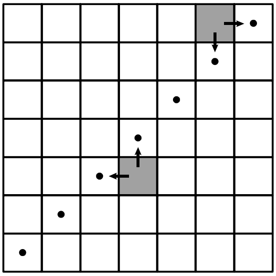


Рис. 45

287. Ответ: а) нет, б) да.

а) Пусть получилось раскрасить, тогда каждая клетка, находящаяся внутри таблицы, имеет 2 белых и 2 чёрных соседа.

1. Если к какой-нибудь клетке примыкают два соседа одного цвета, то оставшиеся два соседа — другого цвета.

2. Две клетки, которые примыкают к углу, одноцветные.

В этом случае чередование цветов будет соответствовать изображённому на рис. 46.

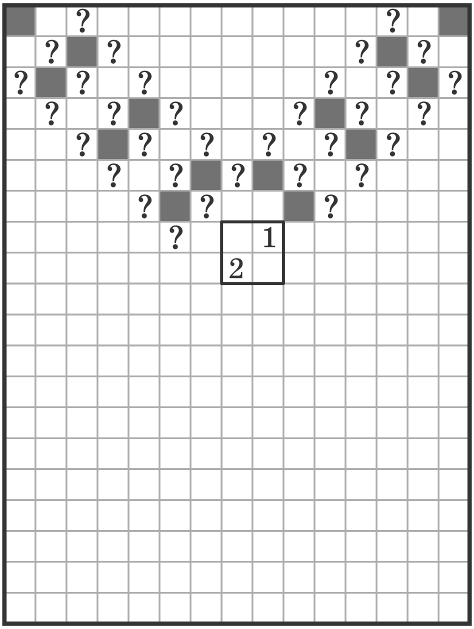


Рис. 46

3. Если начать из левого верхнего угла, получим, что клетки 1, 2 окрашены одинаково (в чёрный цвет, если в левом верхнем углу чёрная клетка, в белый, если в углу белый цвет).

4. Если начать из правого верхнего угла, получим, что клетки 1, 2 окрашены по-разному.

Получили противоречие. Следовательно, так раскрасить таблицу 20×15 нельзя.

б) Примеры раскрасок см. на рис 47 и 48.

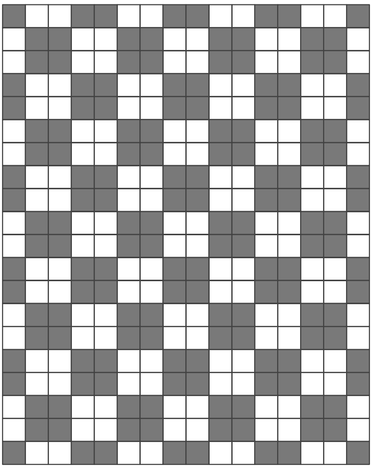


Рис. 47

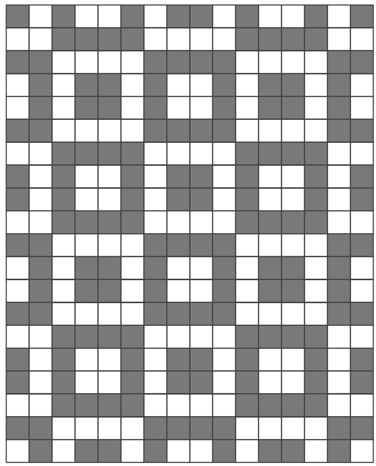


Рис. 48

288. Ответ: нельзя.

Предположим, что угловая клетка не отмечена. У неё всего три соседние клетки, следовательно, эти клетки отмечены (рис. 49).

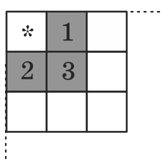


Рис. 49

Тогда рядом с каждой из отмеченных клеток 1–3 отмечена ещё одна клетка, причём любая отмеченная клетка рядом с клеткой 1 (или с клеткой 3) будет граничить и с клеткой 3 (соответственно с клеткой 1) и не будет граничить с клеткой 2 (клетка * не отмечена).

Тогда рядом с каждой из клеток 1 и 2 есть одна отмеченная клетка. В этом случае клетка 3 имеет четыре отмеченные соседние клетки. Противоречие.

Рассмотрим случай, когда угловая клетка отмечена. Тогда все четыре угловые клетки в каждом из углов (см. рис. 50) также будут отмечены.

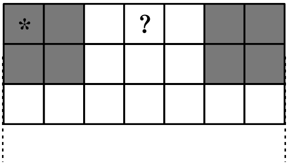


Рис. 50

У клетки со знаком «?» может быть лишь одна отмеченная клетка, граничащая с ней. Этот вариант также не удовлетворяет условию.

Следовательно, выполнить условие невозможно.

289. Ответ: нет.

Разобьём квадрат на 16 квадратов 2×2. Тогда хотя бы в одном из таких квадратов окажется не менее двух закрашенных клеток. Эти клетки будут граничить между собой.

290. Ответ: можно.

Например, см. рис. 51.

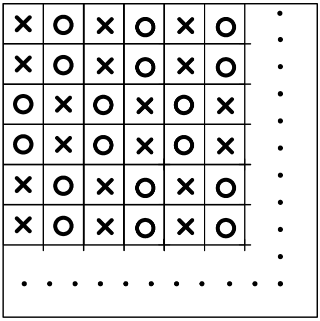


Рис. 51

291. Ответ: см. рис. 52.

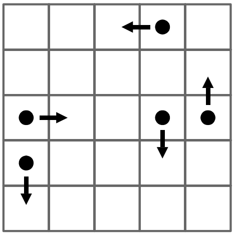


Рис. 52

292. Ответ: да.

Пример см. на рис. 53.

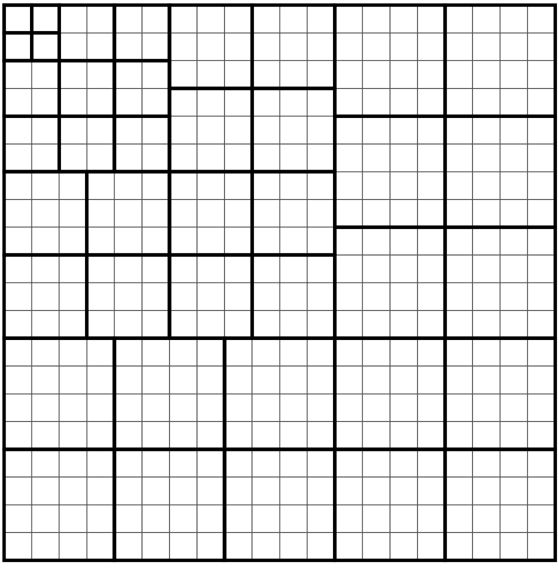


Рис. 53

293. Ответ: нет.

Существует несколько решений задачи.

Например, можно раскрасить доску, как показано на рис. 54. Каждый прямоугольник 1×4 захватывает только одну закрашенную клетку. Всего 26 закрашенных клеток, а у нас 25 прямоугольников.

Следовательно, покрыть доску 25 такими прямоугольниками невозможно.

Ещё одно решение можно получить с помощью рис. 55. Подумайте об этом самостоятельно.

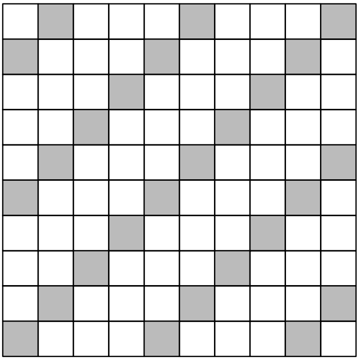


Рис. 54

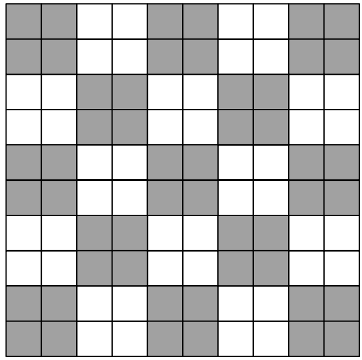


Рис. 55

294. Ответ: нельзя.

Так как площадь стенки — целое число, не кратное 4, а площадь каждой плитки кратна 4, покрыть стенку плитками нельзя.

295. Ответ: можно.

Разделим мысленно стенку на две части размером $20\times15\times9$ и $20\times15\times5$, каждую из которых можно сложить из данных частей.

296. Ответ: например, см. рис. 56.

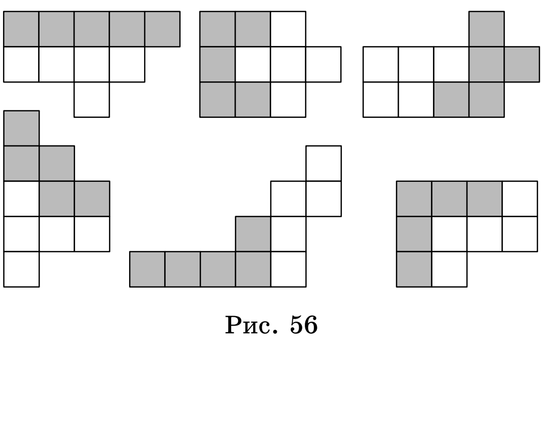


Рис. 56

297. Ответ: 32 коня.

На шахматной доске легко расставить 32 коня так, чтобы они не били друг друга: их достаточно поставить на поля одного цвета.

Докажем, что больше коней поставить не удастся. Разобьём доску на 8 равных частей и занумеруем клетки каждой части (см. рис. 57).

1	3	2	4
2	4	1	3

Рис. 57

На каждой такой части можно расставить не более 4 коней требуемым образом: на полях с одинаковыми номерами может находиться только один конь. Если предположить, что на шахматной доске можно разместить 33 коня, то на одном из кусков будет 5 коней, и мы получаем противоречие.

298. Ответ: 15.

Докажем, что прямая пересекает не более 15 клеток. Прямая пересекает сторону квадрата, следовательно, она пересекает одну из прямых, образующих стороны квадрата.

Всего на шахматной доске 18 прямых: 9 горизонтальных и 9 вертикальных. Искомая прямая может пересечь любую из них, но она может пересечь не более двух из четырёх прямых, образующих границу шахматной доски. Получим 16 пересечений, делящих прямую на 15 отрезков, каждый из которых соответствует одной клетке доски.

Пересечь 15 клеток можно, см. рис. 58.

299. Ответ: нельзя.

Пусть плитки расположены на доске, окрашенной в «шахматном» порядке, и пронумерованы числами от 1 до 1993. Заметим, что плитки с нечётными номерами должны находиться на клетках одинакового цвета. Таким образом, плитки с номерами 1 и 1993 не могут быть соседними. Следовательно, из 1993 плиток нельзя выложить замкнутую цепочку.

300. Ответ: нет.

Расставим на доске числа 0, 1, 2, как показано на рис. 59.

«Хромой король» начинает свой путь из клетки, в которой написано число 0. По правилам из этой клетки он может попасть в клетку с числом 1, далее в клетку с числом 2, затем в клетку с числом 0 и так далее.

Предположим, что король обошёл всю доску, побывав в каждой клетке по одному разу, и сделал 63 хода. Тогда сумма чисел на всей доске была бы равна

$$(0+1+2)+\ldots+(0+1+2)+0=63.$$

Но это неверно. Легко убедиться, что сумма всех чисел на доске равна 64. Противоречие.

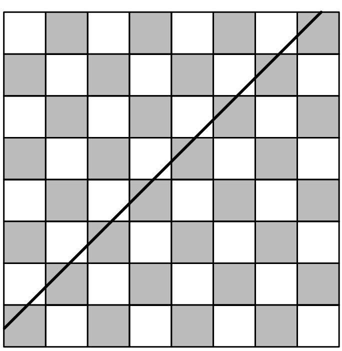


Рис. 58

1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1

Рис. 59

301. На рис. 60–63 показаны некоторые из возможных ответов.

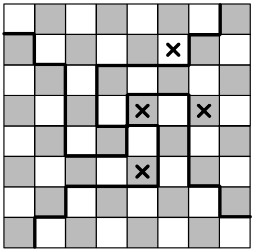


Рис. 60

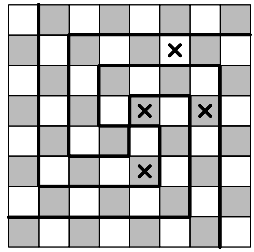


Рис. 61

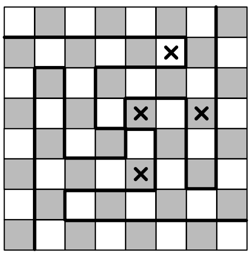


Рис. 62

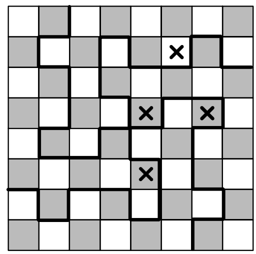


Рис. 63

302. Ответ: см. рис. 64.

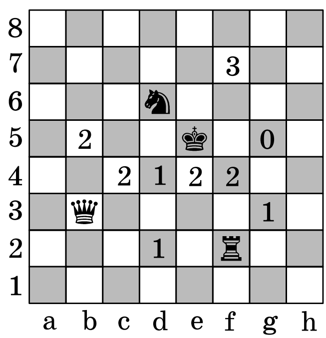


Рис. 64

Пусть на поле d6 стоит фигура 1, на e5 — фигура 2, на b3 — фигура 3, на f2 — фигура 4.

1. Фигура 2 не ладья и не ферзь, поскольку не бьёт клетку g5. Следовательно, она не бьёт и b5. Значит, клетку b5 бьют фигура 1 и фигура 3. Тогда фигура 1 — конь, а фигура 3 — ладья или ферзь.

2. Из пункта 1 следует, что фигура 3 бьёт g3, значит, фигура 4 не бьёт эту клетку. При этом фигура 4 единственная, которая может бить клетку d2 (так как фигура 1 — конь), следовательно, фигура 4 — ладья.

3. Фигура 2 бьёт f4, а фигура 3 не может бить эту клетку. Значит, фигура 2 не конь, следовательно, фигура 3 — ферзь, поскольку три фигуры должны бить f7.

4. Фигура 2 может бить клетки d4, e4, f4. При этом фигура 2 не бьёт g3, поскольку её бьёт фигура 3, значит, фигура 2 — король.

303. Ответ: $82{,}5^\circ$ или $97{,}5^\circ$.

Минутная стрелка за полчаса поворачивается на 180°, то есть возвращается на ту же прямую, только меняет направление на противоположное. За это время часовая стрелка поворачивается на $\frac{1}{24}$ полного оборота, то есть на 15°.

Возможны два случая: в начальный момент часовая стрелка либо «опережала» минутную стрелку, либо «отставала» от нее.

Составим уравнение (2 случая).

1. Если угол α острый, то $2\alpha + 15^\circ = 180^\circ$, следовательно, $\alpha = 82{,}5^\circ$ (см. рис 65).

2. Если угол α тупой, то $2\alpha - 15^\circ = 180^\circ$, следовательно, $\alpha = 97{,}5^\circ$ (см. рис. 66).

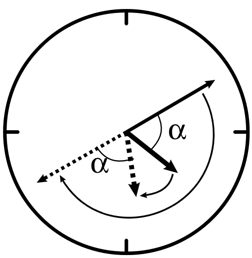


Рис. 65

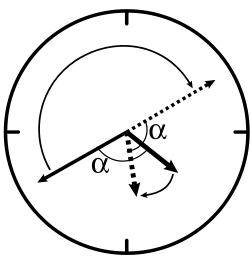


Рис. 66

304. Ответ: 4 деления.

Достаточно нанести деления в 1 см, 6 см, 9 см, 11 см.

Действительно, тогда помимо указанных расстояний мы можем находить расстояния до второго конца линейки (12 см, 7 см, 4 см, 2 см), а также расстояния между делениями (10 см, 5 см, 3 см, 2 см, 8 см) и всю длину линейки 13 см.

Меньшим числом делений обойтись не удастся, так как 5 точек A, B, C, D, E (концы линейки и три деления) определяют не более 10 различных отрезков AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE, а нам необходимо научиться измерять 13 отрезков.

305. Ответ: да.

Положим яблоки в ряд и представим их как единое целое. Чтобы разделить целое на 8 частей, достаточно 7 разрезов. Как написал один участник олимпиады: «представим, что у нас не яблоки, а колбаса».

Отрежем от первого яблока $\frac{5}{8}$, что составит первую порцию (первый разрез); $\frac{3}{8}$ от первого яблока плюс $\frac{2}{8}$ от второго яблока составят вторую порцию (второй разрез); затем $\frac{5}{8}$ от второго яблока (третий разрез), от второго яблока останется $\frac{1}{8}$, добавим $\frac{4}{8}$ третьего яблока (четвёртый разрез) и так далее.

306. Ответ: см. рис. 67.

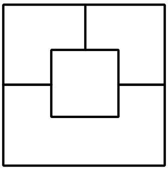


Рис. 67

307. Наиболее простой ответ приведён на рис. 68. Возможно и другое решение, см. рис. 69.

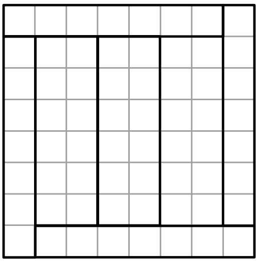


Рис. 68

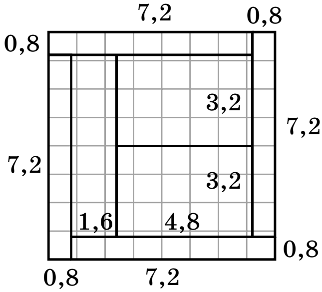


Рис. 69

Можно доказать, что других решений не существует (от участников турнира этого не требовалось).

308. Ответ: см. рис. 70.

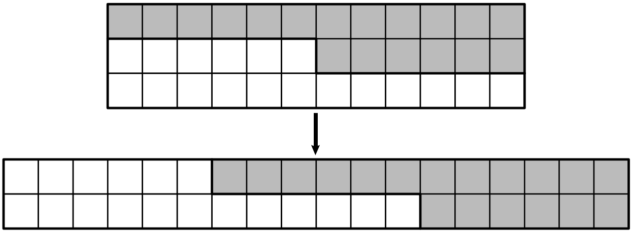


Рис. 70

309. Ответ: из 36 шаров.
См. рис. 71 и 72.

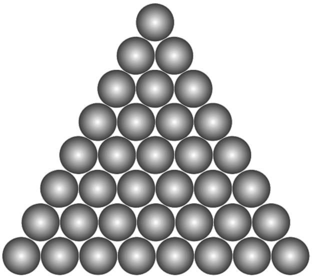


Рис. 71

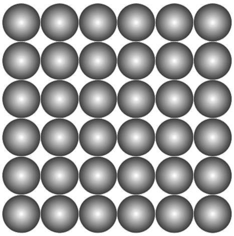


Рис. 72

310. Ответ: см. рис 76.

Докажем, что такая точка ровно одна.

Крестиками на рис. 73–75 показаны ходы, являющиеся проигрышными. Единственный возможный ход выделен серым цветом на рис. 76.

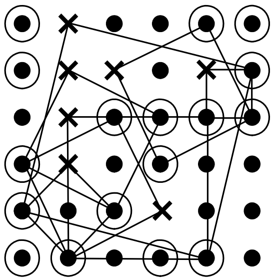


Рис. 73

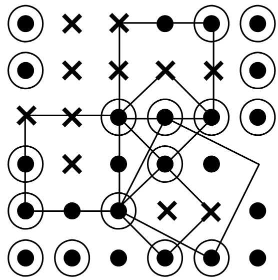


Рис. 74

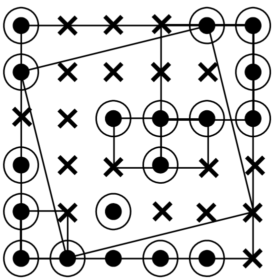


Рис. 75

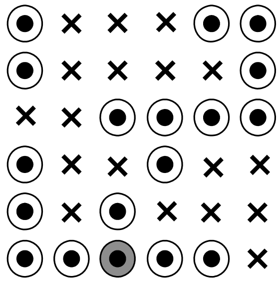


Рис. 76

311. Ответ: а) да; б) нет.

а) Откладываем прямоугольник 1×2009. Остальные составляем следующим образом: 1×1 + 1×2008, 1×2 + 1×2007 и так далее В итоге получаем 1004 прямоугольника размером 1×2009. Складываем их вместе по длинной стороне и добавляем к ним первый.

б) Сторона квадрата не может быть меньше чем 2009, а суммарная площадь всех имеющихся прямоугольников меньше чем 2009^2. Поэтому из них нельзя сложить квадрат.

312. Одно из возможных решений см. на рис. 77.

Получились прямоугольники 1×2, 3×8, 4×5, 6×10, 7×9.

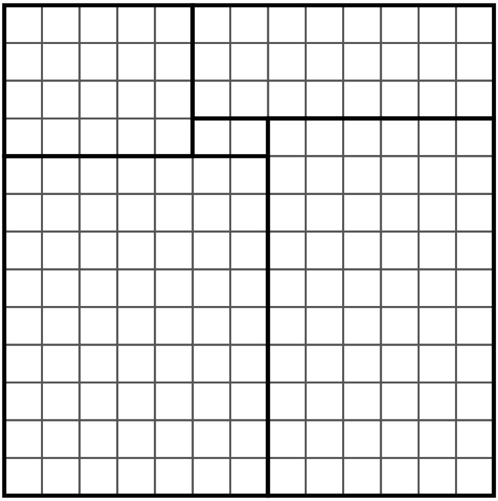


Рис. 77

313. Ответ: леса и пастбищ поровну.

Дополним тёмные треугольники до прямоугольников равными треугольниками (см. рис. 78). Видно, что площадь светлых участков равна площади тёмных участков. Таким образом, леса и пастбищ у маркиза поровну.

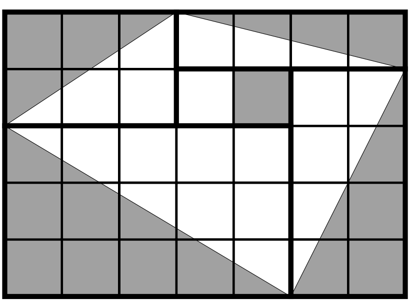


Рис. 78

314. Находим сначала середины сторон. Для этого складываем и разворачиваем листочек пополам (по средней линии), сначала одни стороны, потом другие (рис. 79). Затем разворачиваем и сгибаем листок по линиям, соединяющим вершину квадрата и середину противоположной стороны (рис. 80). В центре получаем искомый квадрат (рис. 81).

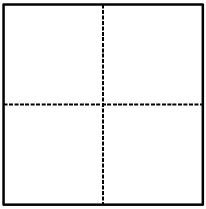


Рис. 79

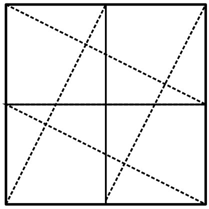


Рис. 80

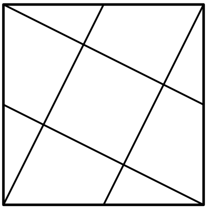


Рис. 81

Покажем, что его площадь равна 80 см^2, т.е. $\frac{1}{5}$ площади исходного квадрата.

Подставив справа и слева такие же квадраты (рис. 82), можно увидеть, что фигуры 1 и 2, 3 и 4 образуют квадраты. Такие же квадраты образуют фигуры 5 и 6, 7 и 8.

315. Ответ: может.

В прямоугольниках 1×2 проведём диагонали (см. рис. 83). Четырёхугольник, образованный диагоналями, представляет собой квадрат площадью 5 дм^2, что портному и требовалось.

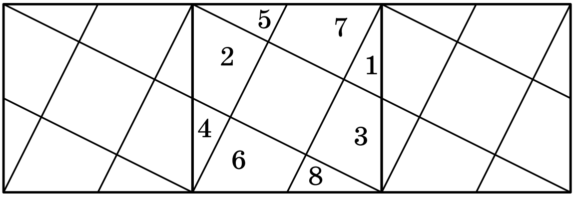


Рис. 82

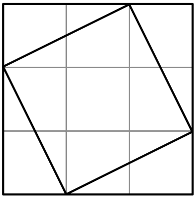


Рис. 83

316. Ответ: 36 м^2.

Первое решение (геометрическое). Разделим комнату на 16 равных квадратов площадью 4 м^2 каждый (см. рис. 84). Тогда четверть комнаты, покрытая в два слоя, — 4 центральных квадрата. В этом случае каждый ковёр состоит из 9 квадратов, то есть площадь каждого ковра — 36 м^2.

Если ковры будут иметь меньшую площадь, то «двуслойная» часть будет составлять меньше четверти комнаты. Если же ковры будут иметь бо́льшую площадь, то «двуслойная» часть будет составлять больше четверти комнаты. Таким образом, найденный ответ единственный.

Второе решение (арифметическое). Обозначим часть стороны комнаты, не покрытую коврами, через a (см. рис. 85). Сторона «двуслойного» квадрата равна 4 м (так как его площадь равна $64 : 4 = 16$ м^2). Тогда $2a = 8 - 4 = 4$ м, то есть $a = 2$ м. Следовательно, сторона ковров равна $8 - 2 = 6$ м, то есть искомая площадь ковров 36 м^2.

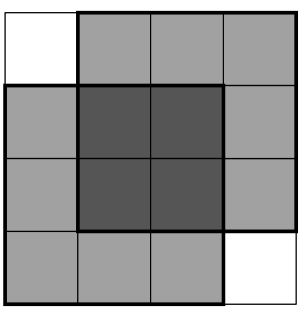


Рис. 84

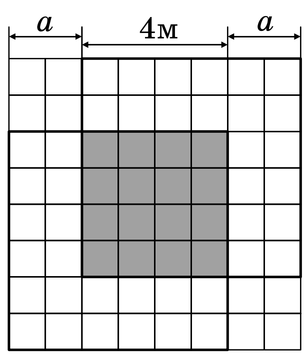


Рис. 85

317. Ответ: можно.

Пример см. на рис. 86 и 87.

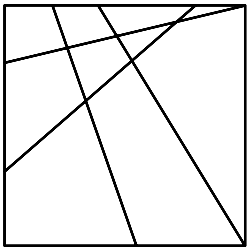


Рис. 86

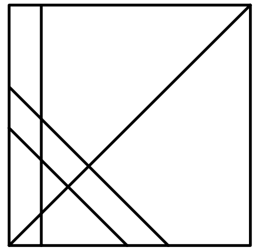


Рис. 87

318. Ответ: а) 22; б) 25.

а) Любой «не Саша» может «испортить жизнь» максимум двум гостям. Поскольку всего четыре «не Саши», максимально не исполнится 8 желаний. Пример см. на рис. 88.

б) Рассмотрим тех же четырёх человек. Теперь количество их соседей должно быть наименьшим, что достигается наличием максимального количества общих соседей. Докажем, что общих соседей не менее пяти.

Возьмём одного «не Сашу» и его соседей: второй «не Саша» может иметь с ним лишь одного общего соседа, то есть у них три «несчастливых» соседа. Ещё один «не Саша» добавляет к «несчастливым» не менее одного человека и так далее.

Таким образом, максимальное количество исполнившихся желаний равно 25. Пример показан на рис. 89.

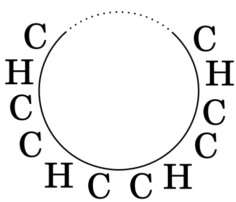


Рис. 88

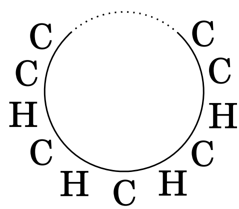


Рис. 89

319. Например, см. рис 90.

320. Например, см. рис. 91.

Крепости — звёздочки. Перёкрестки — кружочки.

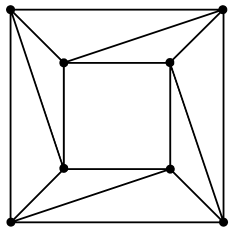


Рис. 90

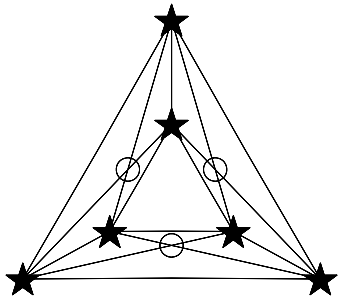


Рис. 91

321. Ответ: три краски.

Двух цветов недостаточно, так как можно найти три попарно пересекающиеся дороги (например, дорожки 2, 3 и 5, см. рис. 92).

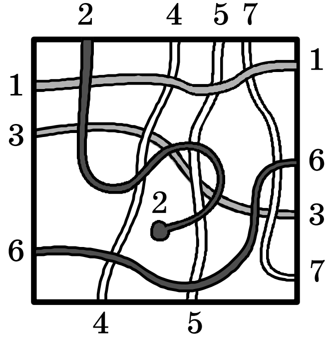


Рис. 92

Можно покрасить в три краски, например, в одинаковый цвет можно покрасить дорожки 1 и 3; дорожки 2 и 6; дорожки 4, 5 и 7.

322. Ответ: а) да; б) нет.

а) Решение можно представить в виде таблицы.

Ёлки	1	2	3	4	5	6
1		Б	К	З	Ж	С
2	Б		З	Ж	С	К
3	К	З		С	Б	Ж
4	З	Ж	С		К	Б
5	Ж	С	Б	К		З
6	С	К	Ж	Б	З	

В таблице буквами Б, К, З, Ж и С обозначены соответственно белый, красный, зелёный, жёлтый и синий цвета.

б) Заметим, что всего гирлянд было

$$(13 \times 12) : 2 = 78\,.$$

При этом гирлянд каждого цвета должно быть поровну, а так как цветов — 12, это невозможно.

323. Ответ: да, просьба выполнима, см. рис. 93.

Идея решения: ёлки расположены в вершинах двух ромбов, стороны которых и одна из диагоналей равны 10 шагам.

Кроме того, у этих ромбов имеется общая вершина (A), а две другие вершины (B и C) также находятся на расстоянии 10 шагов.

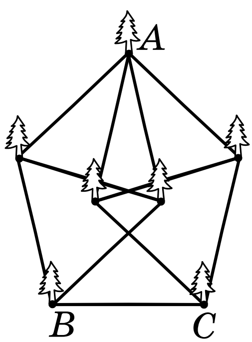


Рис. 93

324. Ответ: а) да; б) да.

Соединим все точки отрезками друг с другом (всего 19 900 отрезков) и проведём ко всем отрезкам серединные перпендикуляры. Взяв в качестве центра окружности точку, не лежащую ни на каком из серединных перпендикуляров, получим, что расстояние от центра окружности до любой из точек различно (!). Подбирая нужный радиус окружности, можно добиться того, что внутри окружности будет ровно 3 точки или ровно 100 точек.

325. Ответ: а) да; б) нет.

а) Возьмём куски проволоки (см. рис. 94) ABN, BCM, CDL, DEK, ATF, TSG, SRH, RPK. Указанный способ решения не единственный.

б) Сумма длин кусков в точности равна длине всех линий сетки, значит, проволоки могут пересекаться только в узлах сетки. Тогда в каждой из точек (в которых есть три направления движения) B, C, D, F, G, H, L, M, N, R, S, T должен располагаться конец хотя бы одного куска. Точек 12, значит, и кусков должно быть не меньше шести.

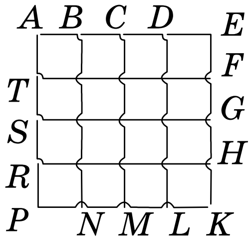


Рис. 94

326. Ответ: полностью закрыт медный контур, см. рис. 95.

Докажем, что полностью закрыт может быть только медный контур.

Заметим, что алюминиевый контур, часть которого расположена сверху листа, пересекает только одну сторону листа (верхнюю), не соединяясь с другими видимыми частями проволоки (будем называть такие контуры «односторонними»).

1. Предположим, что верхний алюминиевый контур соединён с боковым. Тогда точки бокового медного контура (A и B, см. рис. 96) лежат в частях, разделённых алюминиевым контуром; медный контур пересекает алюминиевый, что противоречит условию задачи.

Если верхний алюминиевый контур соединён с нижним, то концы нижнего медного контура (M и N, см. рис. 97) лежат в частях, разделённых алюминиевым контуром; медный контур пересекает алюминиевый, что противоречит условию задачи.

Значит, верхний алюминиевый контур «односторонний», а следовательно, «односторонним» является и верхний медный контур.

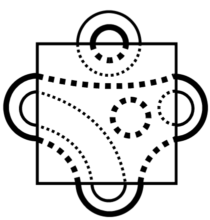


Рис. 95

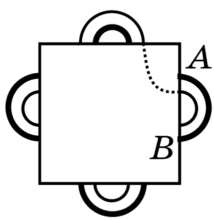


Рис. 96

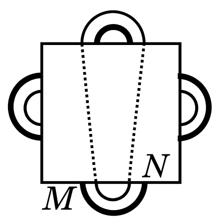


Рис. 97

2. Докажем, что оставшиеся три видимые части медной проволоки составляют один контур.

Если все эти части «односторонние», то образуется четыре различных медных контура, что невозможно.

Предположим, что две части медной проволоки соединены между собой, а третья часть образует «односторонний» контур. Тогда соединены и соответствующие части алюминиевого контура, и оставшийся алюминиевый контур «односторонний».

В таком случае видны части всех шести контуров, что также невозможно. Значит, два боковых и нижний куски медной проволоки образуют один контур.

3. Так как видны части двух медных контуров, третий медный контур полностью скрыт.

Описанная ситуация возможна, см. рис 95.

327. Ответ: см. рис. 98.

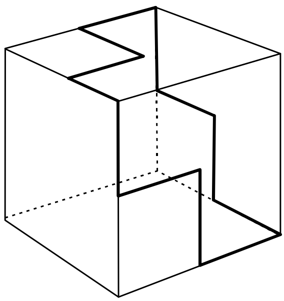


Рис. 98

328. Ответ: а) нельзя; б) можно.

а) Сложим вместе все куски проволоки. Их общая длина — 19 900 см. 19 900 на 12 нацело не делится, следовательно, каркас куба сделать нельзя.

б) Каркас прямоугольного параллелепипеда сложить можно. Для этого потребуется четыре отрезка одинаковой длины, то есть четыре отрезка, длина которых ($a+b+c$, где a, b, и c — стороны параллелепипеда) равны 4975 см.

329. Ответ: да, см. рис. 99 и 100.

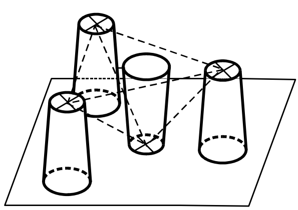


Рис. 99

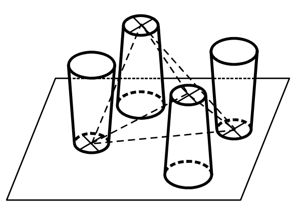


Рис. 100

330. Ответ: сумма чисел на 6 горизонтальных гранях равна 21.

1. Заметим, что грань, содержащая три точки, соседствует с гранями, содержащими одну и две точки.

2. Так как нижняя грань верхнего кубика также соседствует с гранями, содержащими одну и две точки, это однозначно грань с тремя точками. Восстановим известную нам часть развёртки кубика (рис. 101). Сравнивая средний кубик с развёрткой, легко определить, что его верхняя грань содержит две точки.

3. Сколько точек содержит нижняя грань этого кубика, из развёртки определить невозможно, но, очевидно, либо пять, либо шесть точек.

Сравнивая нижний кубик с рисунком развёртки, определяем, что его нижняя грань содержит одну точку.

Определить, сколько точек содержит грань, противоположная к грани с одной точкой, из развёртки невозможно, но, очевидно, либо пять, либо шесть точек. Если напротив грани с двумя точками расположена грань с пятью точками, то напротив грани с одной точкой — грань с шестью точками, и наоборот, если грань с пятью точками противоположна содержащей одну точку, то напротив грани с двумя точками расположена грань с шестью точками.

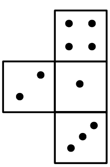


Рис. 101

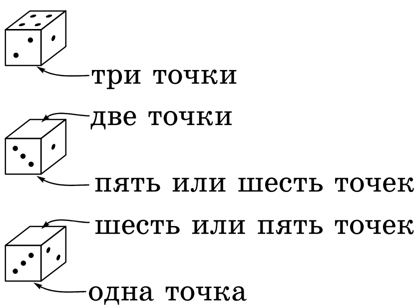


Рис. 102

Но в любом случае сумма точек граней соприкосновения среднего и нижнего кубиков будет равна 11. Несложно сосчитать (см. рис. 102), что сумма точек на горизонтальных гранях всех трёх кубиков будет составлять $4+3+2+(5+6)+1=21$.

331. Ответ: пример развёртки кубика см. на рис. 103; потребуется 8 плиток каждого цвета.

Докажем, что плиток каждого цвета всегда одинаковое число — по 8. У кубика 8 углов, при этом каждый угол образован тремя плитками, которые попарно граничат друг с другом. Следовательно, каждый угол образован тремя плитками разных цветов, а так как углов всего 8, плиток каждого цвета тоже 8.

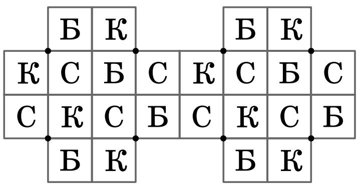


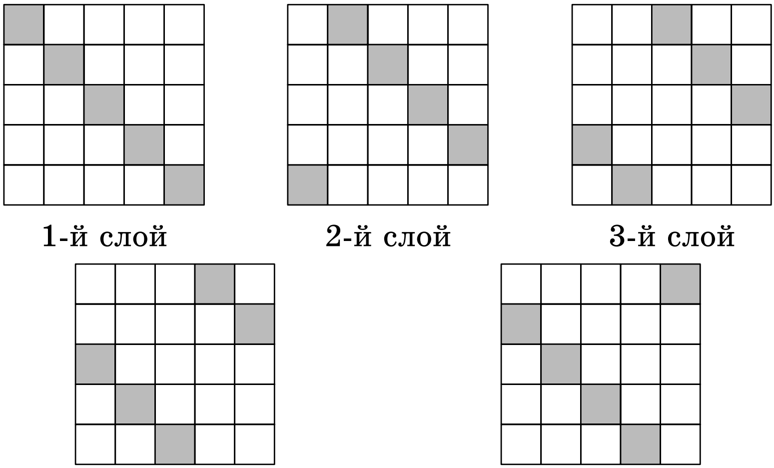
Рис. 103

332. Ответ: 44.

Первое решение. Снимем с кубика все боковые слои толщиной в один маленький кубик. В них повреждено $6 \cdot 2 = 12$ кубиков. А в оставшейся части $2 \times 2 \times 2$ будут повреждены все 8 кубиков. Итого 20 штук. Всего кубиков $4 \times 4 \times 4 = 64$. Следовательно, неповреждённых кубиков 44.

Второе решение. Сосчитаем количество кубиков, просверленных с двух сторон. На внешней поверхности куба 12 кубиков, просверленных с двух сторон. Во внутреннем кубике $2 \times 2 \times 2$ — 6 кубиков, просверленных с двух сторон. Оставшиеся два кубика просверлены со всех сторон. $12+6+2=20$ кубиков просверлено. Всего кубиков $4 \times 4 \times 4 = 64$. Следовательно, неповреждённых кубиков 44.

333. Ответ: достаточно 25 кубиков (см. рис. 104).



1-й слой 2-й слой 3-й слой

4-й слой 5-й слой

Рис. 104

334. Ответ: нельзя.

В додекаэдре 30 рёбер и 20 вершин. Чтобы по рёбрам каждого цвета можно было пройти из любой вершины в любую другую, необходимо хотя бы по 19 рёбер каждого цвета. Итого необходимо 38 рёбер. Противоречие.

335. Ответ: можно.

Разрежем плиту на две части и сложим из них параллелепипед с отношением ребер $8\times12\times18$.

1. Сделаем «ступенчатый» разрез с шириной ступеньки 4 и высотой 9 (см. рис. 105).

2. Сложим полученные фигуры так, чтобы получить параллелепипед $8\times12\times18$.

Разрежем полученный параллелепипед на две части и сложим из них куб.

3. Сделаем «ступенчатый» разрез с шириной ступеньки 4 и высотой 6 (см. рис. 106).

4. Сложим полученные фигуры так, чтобы получить куб $12 \times 12 \times 12$.

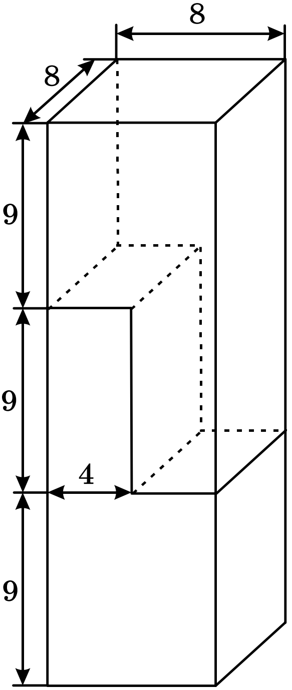


Рис. 105

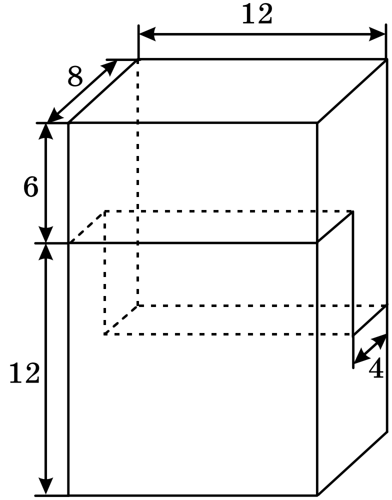


Рис. 106

336. Ответ: не могло.

Покрасим каждую грань куба 5×5 в шахматном порядке, при этом угловая клетка пусть будет чёрной. Тогда чёрных клеток на 6 больше, чем белых. Каждая полоска покрывает две соседние клетки. Полоска покрывает клетки одного цвета, только если она перегнута. Получается, что полосок, покрывающих только чёрные клетки, на 3 больше, чем полосок, покрывающих только белые клетки.

Следовательно, их количества имеют разную чётность, а общее число полосок нечётно.

337. Ключи 1, 3 и 6. Последовательность прохождения лабиринта: $6 \to 3 \to 6 \to 1 \to 3 \to 6 \to 3 \to 1 \to 6$, см. рис. 107.

338. Ответ: условие выполнить невозможно.

Заметим, что в домике имеются три комнаты с нечётным количеством дверей. Если бы искомый маршрут был возможен, то в такой комнате должен был бы быть один из концов маршрута. Таким образом, комнат с нечётным количеством дверей должно быть не больше двух.

339. Ответ: 31.

«Покрасим» комнаты так, как показано на рис. 108. При этом «окрашенных» комнат окажется на 6 больше, чем «неокрашенных», а в любом маршруте цвета должны чередоваться, поэтому «окрашенных» комнат на пути может быть больше на одну. Следовательно, можно побывать самое большее в $36 - 6 + 1 = 31$ комнате.

На рис. 108 показан возможный маршрут.

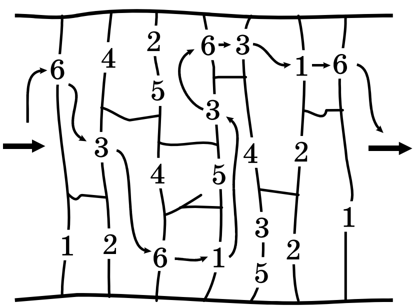


Рис. 107

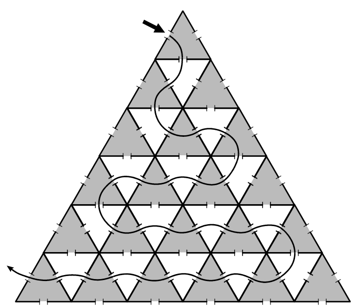


Рис. 108

340. Ответ: в Простоквашино.

Понятно, что школу следует строить на прямой, соединяющей Простоквашино и Матроскино, но где именно?

Если бы и в Простоквашино, и в Матроскино жило по 200 школьников, то школу можно было бы строить в любой точке отрезка, соединяющего обе деревни, — сумма расстояний во всех случаях одна и та же.

Но в Простоквашино живёт на 100 человек больше. Поэтому строить выгодно в Простоквашино — «лишним» школьникам никуда идти не надо.

341. Ответ: а) маршрут Али-Бабы: $A \to B \to F \to$ $\to C \to D \to E$, см. рис. 109; б) 36 288 золотых монет.

а) Заметим, что пройти по дорогам, где приходится платить $a\%$ и $b\%$, выгоднее, чем напрямик по дороге, где берут $(a+b)\%$. В первом случае $b\%$ платится от уменьшенной суммы, а во втором — от исходной.

Обратим внимание также на то, что сумма процентов по любому пути из A в E не менее 90 %. Следовательно, дорога AF нам «не интересна», и её можно «стереть». После этого существует единственный путь из A. Далее, находясь в B, отбрасываем дорогу BC, поскольку путь BFC выгодней. Находясь в F, отбрасываем дороги FD и FE. Остаётся только путь $ABFCDE$.

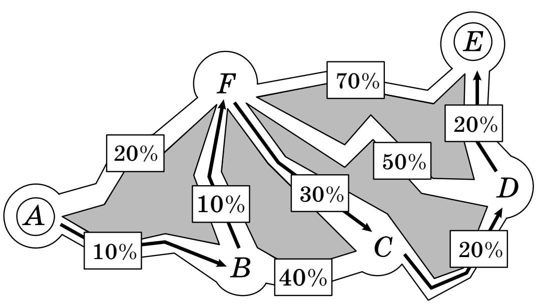


Рис. 109

б) В конце пути у Али-Бабы останется 36 288 монет. Вот как будет изменяться у него количество монет:

$$100\,000 \xrightarrow{-10\%} 90\,000 \xrightarrow{-10\%} 81\,000 \xrightarrow{-30\%} 56\,700 \xrightarrow{-20\%} 45\,360 \xrightarrow{-20\%} 36\,288.$$

342. Ответ: на той же широте восточнее Москвы.

1. Меридианы все одинаковые, следовательно, раз самолёт пролетел 300 км на юг по меридиану и 300 км на север, то он окажется на той же широте.

2. Параллели разные: чем севернее, тем короче (в северном полушарии). Если параллель расположена севернее, то 300 км составят большее число градусов.

343. Ответ: см. рис 110.

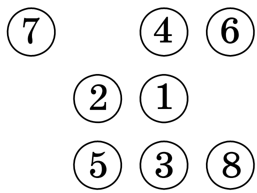


Рис. 110

Для большей наглядности можно сравнить длины прыжков между собой (рис. 111–113). Длину 5-го и 6-го прыжка трудно сравнить, не используя теорему Пифагора.

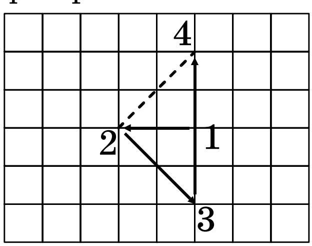


Рис. 111

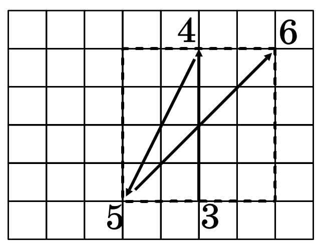


Рис. 112

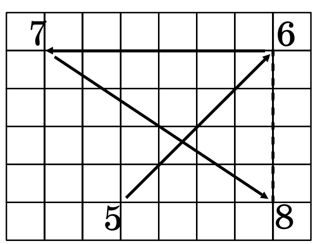


Рис. 113

344. Ответ: 4 линии.

Докажем, что проверки трёх линий недостаточно.

Каждую цифру мы кодируем наличием или отсутствием линии, значит, всего имеется $2^3 = 8$ возможных комбинаций, а цифр у нас 10.

Один из примеров 4 линий, которые нужно проверить, показан на рис. 114.

Для удобства пронумеруем линии (см. рис 115) и составим таблицу для проверки.

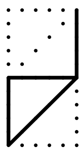


Рис. 114

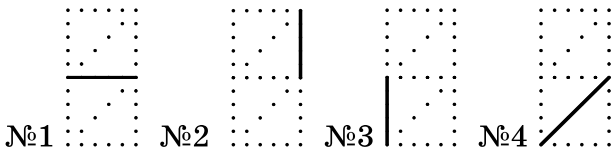


Рис. 115

Цифры индекса	**№1**	**№2**	**№3**	**№4**
0	–	+	+	–
1	–	+	–	–
2	–	+	–	+
3	+	–	–	+
4	+	+	–	–
5	+	–	–	–
6	+	–	+	–
7	–	–	+	–
8	+	+	+	–
9	+	+	–	+

Таким образом, числа можно закодировать:

0 — 0110, 1 — 0100, 2 — 0101, 3 — 1001, 4 — 1100, 5 — 1000, 6 — 1010, 7 — 0010, 8 — 1110, 9 — 1101.

Глава VI

Задачи для исследования

ГЛАВА VI
ЗАДАЧИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ

345. Счастливые билеты. Будем считать, что автобусный билет имеет шестизначный номер, а счастливый билет — это тот, у которого сумма первых трёх цифр равна сумме трёх остальных. Сколько всего счастливых билетов?

346. Суббота или воскресенье? С какого дня чаще начинается год: с субботы или воскресенья?

347. Числа на доске. На доске написаны натуральные числа от 1 до 1997. За один ход разрешается стереть два любых числа, а вместо них написать модуль их разности. Играют двое: Коля и Вася, ходы делают по очереди. В итоге на доске остаётся одно число. Какое число останется на доске, если:

а) оба будут стремиться получить число как можно меньше;

б) оба будут стремиться получить число как можно больше;

в) Коля будет стремиться получить как можно меньшее число (он начинает), а Вася — как можно большее?

348. Гнёзда в патроне электронной лампы равномерно расположены по окружности и занумерованы по часовой стрелке числами от 1 до 100. Можно ли так занумеровать штырьки в лампе (числами от 1 до 100), чтобы при любом включении лампы в патрон хотя бы один из штырьков обязательно попадал в гнездо со своим номером?

349. Последняя конфета. В коробке лежит N конфет. Двое делают ходы по очереди. За один ход каждый может взять себе любое количество конфет, соблюдая два правила:

1) *правило вежливости*: нельзя брать конфет больше, чем только что взял противник;

2) *правило честности*: первым ходом нельзя брать все конфеты.

Выигрывает тот, кто возьмёт последнюю конфету. Кто выиграет при правильной игре?

350. Три кучки камней. Даны три кучки камней. За один шаг можно перекладывать из одной кучки в другую столько камней, сколько в той уже есть. Всегда ли можно за конечное число шагов уравнять какие-нибудь две кучки?

351. Археологическая находка. При раскопках были найдены монеты: 100 золотых и 101 серебряная.

Известно, что все монеты разного размера и веса и, кроме того, если у одной золотой монеты размер больше, чем у другой, то она и весит больше, причём из двух золотых монет легко выбрать бóльшую по размеру монету «невооружённым глазом». Известно также, что и серебряные монеты легко упорядочить по размеру (а следовательно, и по весу) «на глаз», но нельзя таким образом сравнивать монеты, изготовленные из разных металлов (бóльшая по размеру монета может оказаться меньше по весу). В вашем распоряжении чашечные весы без гирь. Можно ли за восемь взвешиваний выделить 101-ю по весу монету?

352. Шахматный матч. Двое шахматистов сыграли матч из 24 партий. Известно, что ни одна партия с нечётным номером не закончилась вничью и ни одному из участников матча не удалось выиграть три партии подряд. За победу в партии даётся 1 очко, за ничью — 0,5 очка, а за поражение 0 очков. Какое наибольшее число очков мог набрать победитель?

353. Новости. В городе N проживает 1000 жителей, причём любые два друга каждого горожанина враждуют между собой, а любые два его врага — дружат. Естественно, что новости обязательно сообщают друзьям, а с незнакомцами никто не разговаривает. Однажды 199 жителей города узнали новость. Узнают ли её остальные горожане?

354. Оркестр из 10 музыкантов готовится к выступлению. Каждый музыкант умеет играть на двух из десяти имеющихся музыкальных инструментов, и на каждом музыкальном инструменте умеют играть ровно два музыканта. Всегда ли можно распределить инструменты между музыкантами так, чтобы каждому достался инструмент, на котором он умеет играть?

355. Загадочное пятизначное число. Известно, что в пятизначном числе все цифры различны и не равны некоторой цифре x. Если записать цифры числа в обратном порядке, то результат окажется меньше исходного числа в x раз. Найдите это число.

356. Кто где живёт? Девять друзей живут в разных квартирах одного 55-квартирного дома. Когда Лиза спросила их, кто где живёт, то в ответ услышала следующие заявления.

Андрей: Номер моей квартиры на 23 больше, чем у Бориса.

Борис: Номер моей квартиры на 16 меньше, чем у Виктора.

Виктор: Номер моей квартиры на 19 меньше, чем у Григория.

Григорий: Номер моей квартиры на 12 больше, чем у Дмитрия.

Дмитрий: Номер моей квартиры на 30 больше, чем у Евгения.

Евгений: Номер моей квартиры на 17 меньше, чем у Ивана.

Иван: Номер моей квартиры на 37 меньше, чем у Константина.

Константин: Номер моей квартиры на 12 больше, чем у Леонида.

Леонид: Номер моей квартиры на 10 больше, чем у Андрея.

Впоследствии было установлено, что сведения, которые дал один из друзей, ошибочны. Определите, кто где живёт.

357. Автобусы на шоссе. По шоссе в одном направлении с постоянной скоростью через равные промежутки времени движутся автобусы. В понедельник Вася пробежал вдоль шоссе 4 км, и за это время его обогнали 6 автобусов. Во вторник он пробежал 7 км, и за это время его обогнали 8 автобусов. В среду он собирается пробежать 17 км. Сколько автобусов его обгонит? (Вася всегда бежит с одной и той же скоростью.)

358. На некотором острове живут только рыцари и лжецы, причём рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Каждый житель острова утверждает следующее.

1. Все мои знакомые знают друг друга.

2. Среди моих знакомых лжецов не меньше, чем рыцарей.

Верно ли, что рыцарей на острове не меньше, чем лжецов?

359. На олимпиаде были даны три задачи: A, B и C. Среди школьников, не решивших задачу A, решивших задачу B в два раза больше, чем решивших задачу C. Школьников, решивших только задачу A, на одного больше, чем остальных школьников, решивших задачу A. Кроме того, известно, что 25 школьников решили хотя бы одну задачу. Сколько школьников решили только задачу B, если среди школьников, решивших только одну задачу, половина не решила задачу A?

360. Подслушано на уроке.

— Я задумал два натуральных числа, бóльших 1, сумма их не превышает 66, — сказал учитель.

Затем он сообщил Васе их сумму, а Феде — произведение и спросил, могут ли они назвать эти числа.

— Я не могу, — сказал Федя.

— Я это знал заранее, — заметил Вася.

— Тогда я знаю эти числа! — воскликнул Федя.

— Тогда и я их знаю! — сказал Вася.

Ученики смогли правильно назвать задуманные числа. Попробуйте и вы их назвать.

361. Сравните с образцом. Среди 15 монет, выглядящих одинаково, имеется одна фальшивая, отличающаяся по весу от остальных, и одна заведомо настоящая — «стандартная» (лежит отдельно). Можно ли за 3 взвешивания на чашечных весах без гирь обнаружить фальшивую монету?

362. Доминошки. На клетчатую доску размером 2009×2009 укладывают доминошки. Известно, что в любой строке и в любом столбце есть клетка, покрытая доминошкой. Какое минимальное количество доминошек потребуется для этого?

363. Большой лист бумаги. Можно ли разрезать квадратный лист бумаги со стороной 1 м на: а) 31 квадрат; б) 30 квадратов? При этом необходимо, чтобы хотя бы один из квадратов имел сторону менее 1 мм.

Ответы, комментарии, решения

345. Ответ: 55 252.

Удобно считать, что существует билет с номером 000 000. Рассмотрим решение, не требующее предварительных знаний.

Пусть $R_2(x)$ — количество двузначных чисел с суммой цифр x, а $R_3(x)$ — количество трёхзначных чисел с суммой цифр x.

Тогда количество счастливых шестизначных билетов с суммой первых трёх цифр x будет равно $(R_3(x))^2$, потому что каждому номеру левой части с суммой x соответствует $R_3(x)$ номеров в правой части.

Заметим, что каждому числу $\overline{abc}$ соответствует единственное число $\overline{(9-a)(9-b)(9-c)}$, то есть каждому числу с суммой цифр s соответствует число с суммой цифр $27-s$.

Поэтому количество билетов, которому соответствует $s \le 13$, равно количеству билетов, которому соответствует $s \ge 14$.

Найдём $R_3(x)$. Для этого подсчитаем количество двузначных номеров с суммой цифр от 0 до 13.

Результаты подсчёта запишем в таблицу 1.

Так, например, $R_2(2)=3$, так как имеется 3 двузначных номера с суммой цифр 2: 11, 02, 20.

Заметим, что из каждого двузначного набора с суммой цифр a можно получить единственный трёхзначный набор с суммой цифр b, дописав одну цифру справа ($b \ge a$). Поэтому в каждой строке таблицы в заполненных клетках стоят одинаковые числа.

В первой строке таблицы 1 указаны суммы цифр номеров трёхзначных наборов, а в последней строке указано количество соответствующих наборов $R_3(x)$, причём каждое значение в строке $R_3(x)$ — сумма соответствующих чисел в столбце над ним.

Так, $R_3(2) = 1 + 2 + 3 = 6$.

Действительно, трёхзначных наборов с суммой цифр 2 ровно 6: 002, 020, 200, 110, 011, 101.

Таблица 1

$R_2(x)$	x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1				
2	1		2	2	2	2	2	2	2	2	2	2			
3	2			3	3	3	3	3	3	3	3	3	3		
4	3				4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	
5	4					5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	5						6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	6							7	7	7	7	7	7	7	7
8	7								8	8	8	8	8	8	8
9	8									9	9	9	9	9	9
10	9										10	10	10	10	10
9	10											9	9	9	9
8	11												8	8	8
7	12													7	7
6	13														6
$R_3(x)$		**1**	**3**	**6**	**10**	**15**	**21**	**28**	**36**	**45**	**55**	**63**	**69**	**73**	**75**

Подсчитаем количество шестизначных счастливых билетов (см. таблицу 2).

Таблица 2

x	$R_3(x)$	$(R_3(x))^2$
0	1	1
1	3	9
2	6	36
3	10	100
4	15	225
5	21	441
6	28	784
7	36	1296
8	45	2025
9	55	3025
10	63	3969
11	69	4761
12	73	5329
13	75	5625

x	$R_3(x)$	$(R_3(x))^2$
14	75	5625
15	73	5329
16	69	4761
17	63	3969
18	55	3025
19	45	2025
20	36	1296
21	28	784
22	21	441
23	15	225
24	10	100
25	6	36
26	3	9
27	1	1

Просуммировав числа в последнем столбце, получим ответ.

346. Ответ: год чаще начинается с воскресенья.

Календарь, которым мы пользуемся, устроен следующим образом: каждый год состоит из 365 дней, за исключением тех лет, номера которых кратны 4. Такие годы называют високосными — в них на 1 день больше. Но и тут есть исключения. Годы, номера которых делятся на 100, но не делятся на 400, високосными не считают.

Таким образом, обычный год содержит 52 недели и 1 день, а високосный год — 52 недели и 2 дня.

Если среди подряд идущих 28 лет каждый четвёртый год високосный (то есть нет ни одного года, номер которого делится на 100, но не делится при этом на 400), то эти 28 лет содержат целое число недель.

Например, раз 1 января 1901 года — вторник, то и 1 января 1929 года тоже вторник.

При этом можно подсчитать, что в течение этих 28 лет год будет начинаться с суббот и воскресений одинаково часто. 400 лет содержат целое число недель (число «добавочных» дней 497; 3 дня теряется за счёт «потерянных» високосных лет).

Следовательно, период нашего календаря 400 лет, а не 28.

Начало года	Годы: 1901–1929					
понедельник		1906	1912	1917	1923	
вторник	1901	1907		1918	1924	1929[1]
среда	1902	1908	1913	1919		
четверг	1903		1914	1920	1925	
пятница	1904	1909	1915		1926	
суббота		1910	1916	1921	1927	
воскресенье	1905	1911		1922	1928	

Так же будут распределяться дни недели с 1929 по 1956 годы, с 1957 по 1984 и так далее до 2096 года (так как 2000 год високосный). Таким образом, 1 января 2097 года будет вторник.

Далее:

1 января 2098 года — среда,

1 января 2099 года — четверг,

1 января 2100 года — пятница,

1 января 2101 года — суббота.

В очередные 28-летия (2101–2128, 2129–2156 и 2157–2184) год будет начинаться одинаковое число раз с каждого дня недели, а 1 января 2129, 2157 и 2185 годов будет субботой.

[1] Начало нового 28-летнего цикла!

Рассмотрим следующие 17 лет.

Начало года	Годы: 2185–2201			
понедельник		2187		2198
вторник		2188	2193	2199
среда			2194	2200
четверг		2189	2195	2201[2]
пятница		2190	2196	
суббота	2185	2191		
воскресенье	2186	2192	2197	

В течение следующих 84 лет (с 2201 до 2284) год также будет начинаться одинаковое число раз со всех дней недели, а 1 января 2285 года будет четверг.

Начало года	Годы: 2285–2300			
понедельник			2294	2300[3]
вторник		2289	2295	
среда		2290	2296	
четверг	2285	2291		
пятница	2286	2292	2297	
суббота	2287		2298	
воскресенье	2288	2293	2299	

Таким образом, в 1901–2096, 2101–2184, 2201–2284 гг. год будет начинаться одинаковое число раз со всех дней недели, остальные же годы из периода 1901–2300 гг. дадут 6 воскресений и 4 субботы. Следовательно, год начинается с воскресенья чаще, чем с субботы.

[2] Начало нового 28-летнего цикла!

[3] Период закончился!

347. Ответ: а) 1; б) 1997; в) неизвестно.

а) Ноль получить нельзя, так как сумма всех чисел не меняет чётности после каждого хода, а исходная сумма нечётна.

Единицу получить можно: сначала получить 999 единиц, объединяя в пары числа 1997 и 1996, 1995 и 1994, ..., 3 и 2 и оставив без пары число 1, затем получить 499 нулей и одну единицу и так далее.

б) Они могут получить 1997, оставив число 1997 без пары и поступая аналогично пункту а).

в) Решение авторам неизвестно.

348. Ответ: нет.

Предположим противное: пусть это возможно.

Рассмотрим два правильных 100-угольника.

Пронумеруем вершины одного из них по часовой стрелке от 1 до 100 (как это было сделано в патроне лампы) и предположим, что мы занумеровали второй 100-угольник требуемым образом.

Наложим на первый 100-угольник второй так, чтобы вершины с номером 1 совпали. Пусть V_i — номера вершин верхнего 100-угольника, а N_i — номера вершин нижнего 100-угольника и напротив вершины V_m лежит вершина N_k.

Тогда для того, чтобы вершина V_m совпала со своим номером, верхний 100-угольник надо повернуть по часовой стрелке на $V_m - N_k$ вершин при $V_m \ge N_k$ и на $V_m - N_k + 100$ вершин при $V_m \le N_k$.

Чтобы совпали оставшиеся 99 вершин, нужно сделать 99 поворотов, то есть верхний 100-угольник надо повернуть на $1 + \ldots + 99 = 4950$ вершин.

С другой стороны, эта же сумма равна

$$V_1 + \ldots + V_{100} - (N_1 + \ldots + N_{100}) + 100k = 100k\,.$$

Так как 4950 не делится на 100, получили противоречие.

349. Ответ: если $N = 2^k$, то выиграет второй игрок, во всех остальных случаях выиграет первый.

1. Пусть N — нечётное число. Выигрышная стратегия начинающего игру: первым ходом он берёт одну конфету, тогда согласно правилу вежливости второй игрок вынужден взять одну конфету, затем первый снова берёт одну и так далее. Последняя конфета достанется первому игроку.

2. Пусть N — чётное число и $N \neq 2^k$, тогда первым ходом начинающий должен брать чётное число конфет, иначе второй игрок, взяв одну конфету, выиграет (см. пункт 1). Если первый берёт чётное количество конфет, то и второму приходится поступать так же, иначе дело сведётся к пункту 1.

Выигрышная стратегия первого игрока: на первом ходу (и на всех остальных) для победы ему требуется брать 2^p конфет, где p — наибольшая возможная степень, при которой имеющееся число конфет кратно 2^p, то есть $N = 2^p \cdot K$, где K — нечётное число.

Поясним это на примере. Если $N = 6$, то первый берёт своим ходом две конфеты, второй вынужден брать две и первый, взяв две конфеты, выигрывает.

3. Пусть $N = 2^k$ и первый игрок взял a конфет. Тогда есть два случая.

Случай 1: $N - a = 2^s$. Второй игрок может взять все конфеты, поскольку 2^s не больше половины N (правило вежливости не будет нарушено).

Случай 2: $N - a \neq 2^s$. Игра сводится к случаям, разобранным в пунктах 1 и 2, с той лишь разницей, что начинает второй игрок.

350. Ответ: всегда.

Пусть имеются две кучки камней, в одной из них нечётное число камней a, а в другой — чётное число b. Докажем, что можно получить кучки, в одной из которых будет $\frac{b}{2}$ камней, а в другой — $a + \frac{b}{2}$.

Коротко говоря: из пары $(a; b)$ можно получить пару $\left(a + \frac{b}{2}; \frac{b}{2}\right)$.

Можно камни из большей кучки перекладывать в меньшую кучку, до тех пор пока количество камней во второй кучке не станет больше, чем в первой. Затем опять количество камней в первой кучке станет больше и так далее. Так как количество камней конечно, в какой-то момент ситуация повторится и образуется цикл.

Заметим, что для любой пары есть только одна (!) предшествующая пара.

Так, пара $(a - b; 2b)$ может быть получена только из пары $(a; b)$.

Это означает, что в какой-то момент повторится начальная комбинация $(a; b)$ и «предшествующая» ей комбинация $\left(a + \frac{b}{2}; \frac{b}{2}\right)$.

Пусть имеются три кучки: в первой — a камней, во второй — b камней, в третьей — c. Будем называть такую ситуацию состоянием $(a; b; c)$.

Докажем, что можно уравнять количество камней в каких-нибудь двух кучках из трёх.

Возможны четыре случая.

1. Среди чисел a, b и c одно нечётное.

Пусть a нечётное и для определённости $b \geq c$. Предположим, что b кратно 4.

Покажем, как увеличить число камней в первой кучке, сохранив чётность в остальных.

Из состояния $(a; b; c)$ перейдём в состояние $\left(a+\frac{b}{2}; \frac{b}{2}; c\right)$. Получим кучку с нечётным $\left(a+\frac{b}{2}\right)$ числом камней и две кучки с чётным числом камней, при этом число камней в первой кучке увеличилось.

Если повторять эту операцию дальше, то одна из кучек с чётным числом камней рано или поздно опустеет (число камней станет равно 0).

Заметим, что пустая кучка может быть получена только из двух равных кучек. Следовательно, на каком-то шаге две кучки уравнялись.

Если $b > c$ и b не кратно 4, то переложим камни из второй кучки в третью; в третьей кучке будет $2c$ камней, что кратно 4. Если третья кучка стала больше второй, то меняем её местами со второй. Если вторая кучка пока больше третьей, то перекладываем из неё камни в третью, пока третья не станет больше. После этого меняем вторую и третью кучки местами.

Рассмотрим остальные случаи.

2. Все числа a, b и c нечётные. Ситуация сводится к первому случаю после одного шага (любого).

3. Среди чисел a, b и c одно чётное. Предположим, что это число c и для определённости $a \geq b$.

Переложим из первой кучки часть камней во вторую, получим в ней $2b$ камней и тем самым сведём дело к случаю 4.

4. Все числа a , b и c чётные.

Следовательно, при любом шаге перекладывается чётное количество камней, а значит, можно «воспринимать» два камня как один. Количество «камней» при этом уменьшается вдвое.

Если после этого получилась ситуация, соответствующая пунктам 1 или 2, то будем действовать аналогично и постепенно добьёмся нужного результата.

Если ситуация будет соответствовать пункту 4, то объединим не два, а четыре камня, и так далее.

Если ситуация сводится к пункту 3, то из неё можно перейти в состояние пункта 4, после чего количество камней уменьшится вдвое.

В конце концов решение сведётся к случаям 1 или 2, потому что количество камней конечно.

351. Ответ: можно.

Упорядочим имеющиеся монеты по размеру (и весу):

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_{101} \text{ — серебряные монеты,}$$

$$b_1 < b_2 < \ldots < b_{100} \text{ — золотые монеты.}$$

Назовём искомую монету «средней».

1. Взвесим монеты a_{51} и b_{50}.

Если $a_{51} < b_{50}$ (перевесила золотая), то «средней» не может быть монета из набора $b_{51},\ldots,b_{100}$, поскольку все они тяжелее любой монеты $b_1,\ldots,b_{50}$ и тяжелее монет $a_1,\ldots,a_{51}$ в силу неравенств

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_{51} < b_{50} < b_{51}.$$

Также «средней» не может быть монета из набора $a_1,\ldots,a_{50}$, так как вес каждой из них меньше веса любой монеты из наборов $b_{50},\ldots b_{100}$ и $a_{51},\ldots,a_{101}$.

Если $a_{51} > b_{50}$ (перевесила серебряная монета), то «средней» не может быть монета из набора $b_1, \ldots, b_{50}$, так как вес каждой из этих монет меньше веса любой монеты из наборов $b_{51}, \ldots b_{100}$ и $a_{51}, \ldots, a_{101}$.

Монеты $a_{52}, \ldots, a_{101}$ не могут быть «средними», так как каждая из них тяжелее каждой из монет $b_1, \ldots b_{50}$ и $a_1, \ldots, a_{51}$.

Таким образом, в результате первого взвешивания мы отбросим 100 монет, не являющихся «средними».

Мы упростили задачу. Теперь требуется найти «среднюю» монету из 101 монеты.

2. Действуя аналогично, сократим количество монет до 51.

Упорядочим оставшиеся монеты заново:

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_{26} \quad \text{и} \quad b_1 < b_2 < \ldots < b_{25}.$$

3. Теперь из 51 монеты оставим 27.

Взвесим монеты a_{13} и b_{13}.

Если $a_{13} > b_{13}$ (перевесила серебряная), то «средними» не могут быть монеты $b_1, \ldots, b_{12}$ (они легче «средней») и монеты $a_{14}, \ldots, a_{26}$ (они тяжелее).

Уберём все эти монеты, кроме a_{26}. Она тяжелее искомой, обозначим её a_T.

Если $a_{13} < b_{13}$ (перевесила золотая), то «средними» не могут быть монеты $b_{13}, \ldots, b_{25}$ (они тяжелее «средней») и монеты $a_1, \ldots, a_{12}$ (они легче).

Уберём эти монеты, кроме a_1. Она легче «средней», обозначим её $a_Л$.

Осталось 27 монет. При этом есть одна выделенная серебряная монета, про которую точно известно, что она заведомо тяжелее «средней» (или заведомо легче «средней»).

В дальнейшем мы так же будем отбрасывать часть монет так, чтобы половина отбрасываемых по весу была меньше «средней», а вторая половина — больше «средней», в результате чего «средняя» среди всех монет будет «средней» среди оставшихся.

Рассмотрим случай, когда выделенная монета тяжелее «средней» монеты (случай, когда выделенная монета легче «средней», рассматривается аналогично).

Упорядочим монеты заново:

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_{13} < a_T \quad \text{и} \quad b_1 < b_2 < \ldots < b_{13}.$$

4. Взвесим монеты a_7 и b_7.

Если $a_7 < b_7$, то уберём монеты $a_2, \ldots, a_7$ и $b_8, \ldots, b_{13}$ (монету a_1 не убрали, чтобы осталось нечётное количество монет).

Если $a_7 > b_7$, то уберём монеты $b_1, \ldots, b_6$ и монеты $a_8, \ldots, a_{13}$.

Осталось 15 монет.

Упорядочим монеты заново:

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_7 < a_T \quad \text{и} \quad b_1 < b_2 < \ldots < b_7.$$

5. С оставшимися монетами поступим аналогично пункту 1. После пятого взвешивания останется 9 монет, упорядочим их заново:

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_T \quad \text{и} \quad b_1 < b_2 < b_3 < b_4.$$

6. С 9 монетами поступаем аналогично пункту 1.

Взвесим монеты a_3 и b_3.

Если $a_3 < b_3$, то уберём монеты a_1, a_2, b_3 и b_4.

Если $a_3 > b_3$, то уберём монеты a_3, a_4, b_1 и b_2.

Осталось 5 монет, упорядочим монеты заново:

$$a_1 < a_2 < a_T \quad \text{и} \quad b_1 < b_2$$

Получим набор из золотых монет b_1 и b_2 и серебряных a_1, a_2 и a_T. При этом монета a_T тяжелее монет a_1 и a_2.

7. Взвесим a_2 и b_2.

Если $a_2 > b_2$, то монета b_1 лёгкая, а монета a_2 тяжёлая. Уберём их. Осталось 3 монеты.

8. На последнем, восьмом взвешивании сравним монеты a_1 и b_2. Если $a_1 > b_2$, то «средняя» монета — a_1. Если же $a_1 < b_2$, то, так как монета a_1 легче монет b_2 и a_T, а монета a_T тяжелее «средней», «средней» монетой будет b_2.

Если $a_2 < b_2$, то получим, что монета b_2 тяжелее «средней» монеты, а монета a_1 легче. Уберём их. Тогда если на восьмом взвешивании получилось, что $a_2 > b_1$, то, поскольку $a_T > a_2$, монета a_2 искомая. Если же $a_2 < b_1$, то монета a_2 легче «средней» и также легче монет b_1 и a_T. Так как монета a_T тяжелее «средней», «средняя» монета — b_1.

352. Ответ: 18,5 очков.

Пример: чтобы набрать 18,5 очков, достаточно выиграть все «нечётные» партии (первую, третью, пятую...), а также последнюю (двадцать четвёртую) партию, закончив все остальные вничью.

Докажем, что победитель не мог набрать больше 18,5 очков, методом «от противного».

Предположим, что он набрал 19 очков (или больше). При этом он не выиграл три партии подряд. Поэтому назовем номер партии, расположенной между двумя выигранными нечётными партиями, «запрещённым».

1. Пусть победитель выиграл все 12 «нечётных» партий. Тогда «запрещённых» (чётных) номеров — 11, а не «запрещённых» — 1. Чтобы набрать 19 очков, победитель должен выиграть не менее двух «чётных» партий (при 10 ничьих). При этом хотя бы одна из них попадет на «запрещённый» номер.

2. Если победитель выиграл 11 «нечётных» партий, то «запрещённых» номеров не менее 9, если 10 — то не менее 7 и так далее. Другими словами, уменьшение числа «нечётных» побед на 1 влечёт уменьшение числа «запрещённых» номеров не более чем на 2.

В то же время если выиграно 11 «нечётных» партий, то количество выигранных «чётных» партий должно быть не менее 2, если выиграно 10 «нечётных», то количество выигранных «чётных» не менее 4, и так далее, что следует из того, что победитель должен набрать не менее 19 очков (см. таблицу).

Выиграно		Ничьих	«Запрещёных» номеров
«нечётных»	«чётных»		
12	2	10	11
11	4	8	9
10	6	6	7
9	8	4	5
8	10	2	3
7	12	0	1

Таким образом, если выиграно 2 «чётные» партии, а среди 12 «чётных» номеров есть 11 «запрещённых», то один из «запрещённых» номеров будет занят.

Если выиграно 4 «чётные» партии, а среди 12 «чётных» номеров есть 9 «запрещённых», то один из «запрещённых» номеров также будет занят, и так далее. И наконец, если выиграно 12 «чётных» партий, то, хотя у нас имеется только один «запрещённый» номер, он будет занят.

Таким образом, победитель не мог набрать больше 18,5 очков.

353. Ответ: не узнают.

Будем считать, что из условия задачи следует, что у каждого жителя было не мене двух друзей и не менее двух врагов (именно так поняли условие задачи большинство участников).

Докажем, что у каждого жителя не может быть больше двух врагов и больше двух друзей.

Предположим, что у некоторого жителя три друга, тогда они должны будут враждовать между собой (согласно условию любые два друга каждого горожанина враждуют между собой). Выберем одного из трёх. Двое других являются его врагами, а следовательно, должны дружить между собой. Пришли к противоречию.

Если у жителя три врага, то они должны между собой дружить, что также приводит к противоречию (убедитесь самостоятельно).

Докажем, что если у каждого жителя два друга и два врага, то всем жителям города новость узнать не удастся.

Всех жителей можно разделить на группы по пять человек (см. рис. 1, сплошной линией показаны дружащие между собой, пунктирной — враждующие), причём у каждого жителя, входящего в группу, его враги и друзья входят в ту же группу. Таких групп получится ровно 200, причём члены разных групп не общаются между собой, то есть любая новость не выходит за пределы группы.

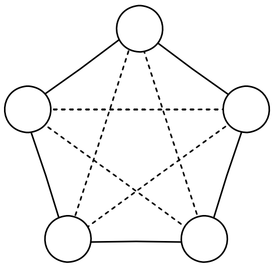


Рис. 1

Тогда по принципу Дирихле жители, входящие в одну из групп, не узнают новость.

Возможно иное понимание задачи. Можно считать, что у некоторых жителей друзей (врагов) меньше двух. Тогда возможна ситуация, когда новость станет известной всем жителям.

354. Ответ: всегда.

Например, можно действовать следующим образом. Первый музыкант берёт один из инструментов, на котором он умеет играть. Второй музыкант, умеющий играть на том же инструменте, взять его уже не может и будет вынужден взять второй инструмент, на котором он умеет играть. И так далее. Последний музыкант в цепочке вынужден взять тот инструмент, который не взял первый музыкант.

Получилась некоторая замкнутая цепочка. Если в этой цепочке все 10 музыкантов, то задача решена, а если не все $(n < 9)$, то оставшиеся $10 - n$ музыкантов получат $10 - n$ инструментов таким же способом. В каждой из таких цепочек будет не менее двух человек и, соответственно, двух музыкальных инструментов.

355. Ответ: это число 87 912.

Пусть искомое число $\overline{ABCDE}$. Перепишем условие в виде $\overline{ABCDE} = \overline{EDCBA} \times \overline{X}$.

Рассмотрим следующие случаи.

1. Если $X = 2$, то E чётное, и, так как $E \neq X$, получаем, что $E \neq 2$; $E < 5$, иначе произведение $\overline{EDCBA} \times 2$ было бы шестизначным числом.

Следовательно, $E = 4$. Тогда из условия следует, что $A = 2$ или $A = 7$. Но $A \neq 2$, так как $A \neq X$, и $A \neq 7$, так как $\overline{7BCD4} < \overline{4DCB7} \times 2$. Получаем противоречие. Следовательно, $X \neq 2$.

2. Если $X = 3$, то $E < 4$, иначе произведение $\overline{EDCBA} \times 3$ было бы шестизначным; $E \neq 3$, так как по условию $E \neq X$.

Если $E = 1$, то $A = 7$, но это невозможно, так как $\overline{7BCD1} > \overline{1DCB7} \times 3$.

Если $E = 2$, то $A = 4$, а значит, $\overline{4BCD2} < \overline{2DCB4} \times 3$. Противоречие, следовательно, $X \neq 3$.

3. Если $X = 4$, то E чётное и $E < 3$, иначе произведение $\overline{EDCBA} \times 4$ было бы шестизначным.

Следовательно, $E = 2$.

Из уравнения $\overline{ABCD2} = \overline{2DCBA} \times 4$ получим, что $A = 3$ или $A = 8$. Первое невозможно, так как $\overline{3BCD2} < \overline{2DCB3} \times 4$.

Следовательно, $\overline{8BCD2} = \overline{2DCB8} \times 4$.

Заметим, что $D < 3$, так как иначе $A \neq 8$. Кроме того, $D \neq 2$, так как все цифры исходного числа различны.

Если $D = 0$, то $\overline{8BC02} = \overline{20CB8} \times 4$ и $B \times 4$ оканчивается на 7, что также невозможно.

Получаем, что $D = 1$, а значит, $\overline{8BC12} = \overline{21CB8} \times 4$.

Тогда $B\times4$ оканчивается на 8, следовательно, $B=7$ и $\overline{87C12}=\overline{21C78}\times4$, откуда перебором получим, что $C=9$.

Получим решение: $87\,912=21\,978\times4$.

4. Если $X\geq5$, то $E=1$.

Тогда при $X=5$, $X=6$ или $X=8$ равенство $\overline{ABCD1}=\overline{1DCBA}\times X$ невыполнимо, так как $5\times A$, $6\times A$ и $8\times A$ не могут оканчиваться на 1.

При $X=7$ равенство $\overline{ABCD1}=\overline{1DCBA}\times7$ возможно, только если $A=3$, но $\overline{3BCD1}<\overline{1DCB3}\times7$.

При $X=9$ равенство $\overline{ABCD1}=\overline{1DCBA}\times9$ возможно, если $A=9$, что неверно, так как $A\neq X$.

Задача не имеет решений при $X>5$.

356. Ответ: Андрей живёт в квартире 33, Борис — 10, Виктор — 26, Григорий — 45, Дмитрий — 31, Евгений — 1, Иван — 18, Константин — 55, Леонид — 43.

Задачу будем решать с помощью таблицы.

Таблицу заполняем по столбцам. В каждом столбце x — номер квартиры человека, который предположительно соврал. Номера квартир остальных вычисляются в соответствии с условием задачи. Если в столбце появились одинаковые выражения — получаем противоречие, так как по условию задачи друзья живут в разных квартирах. Следовательно, этот человек говорил правду.

Действительно, предположив, что неправ Андрей (а остальные при этом правы), получим, что номера квартир Григория и Леонида совпадают. Пусть номер квартиры Андрея — x, тогда согласно высказыванию Леонида он (Леонид) живёт в квартире $x+10$; согласно высказыванию Константина он

(Константин) живёт в квартире $x+22$, и далее, пользуясь высказываниями остальных, получаем, что Иван живёт в квартире $x-15$, Евгений — $x-32$, Дмитрий — $x-2$, Григорий — $x+10$. Но согласно условию задачи номера квартир друзей не совпадают. Следовательно, предположение, что неправ Андрей, ошибочно.

	А	Б	В	Г	Д	Е	И	К	Л
А	x	$x+23$	$x+7$	$x-12$	x	$x+30$	$x+13$	$x-24$	$x-12$
Б	$x-25$	x	$x-16$	$x-35$	$x-23$	$x+7$	$x-10$	$x-47$	$x-35$
В	$x-9$	$x+14$	x	$x-19$	$x-7$	$x+23$	$x+6$	$x-31$	$x-19$
Г	$x+10$	$x+33$	$x+17$	x	$x+12$	$x+42$	$x+25$	$x-12$	x
Д	$x-2$	$x+21$	$x+9$	$x-14$	x	$x+30$	$x+13$	$x-24$	$x-12$
Е	$x-32$	$x-9$	$x-25$	$x-44$	$x-32$	x	$x-17$	$x-54$	$x-42$
И	$x-15$	$x+8$	$x-8$	$x-27$	$x-15$	$x+15$	x	$x-37$	$x-25$
К	$x+22$	$x+45$	$x+29$	$x+10$	$x+22$	$x+52$	$x+35$	x	$x+12$
Л	$x+10$	$x+33$	$x+17$	$x-2$	$x+10$	$x+40$	$x+23$	$x-14$	x

В таблице А — Андрей, Б — Борис и так далее.

Из таблицы следует, что ошибочные сведения мог дать только Григорий. Также обратим внимание на то, что разница между номерами квартир Евгения и Константина равна 54 и, так как квартир всего 55, они живут в квартирах № 1 и 55 соответственно. Следовательно, $x = 45$.

357. Ответ: 21 или 22 автобуса.

Представим расстояние, которое пробежал Вася, в виде

$$a_1 + (n-1)x + a_2,$$

где a_1 — расстояние, которое он пробежал до встречи с первым автобусом, a_2 — расстояние, которое он пробежал после встречи с последним автобусом, x — расстояние между автобусами, а n — число обогнавших Васю автобусов.

Тогда $a_1 < x$ и $a_2 < x$.

В понедельник Вася пробежал

$$a_1 + 5x + a_2 = 4.$$

Следовательно,

$$x = \frac{4 - a_1 - a_2}{5} \le \frac{4}{5}.$$

Далее, если числа a_1 и a_2 заменить на x, то

$$4 = a_1 + 5x + a_2 < x + 5x + x = 7x,$$

откуда получим

$$\frac{4}{7} < x \le \frac{4}{5}.$$

Рассуждая аналогично про вторник, получим

$$\frac{7}{9} < x \le 1$$

Объединив неравенства, получим, что

$$\frac{7}{9} < x \le \frac{4}{5}.$$

Таким образом,

$$\left(17 - 2 \cdot \frac{4}{5}\right) : \frac{4}{5} \le \frac{17 - a_1 - a_2}{x} < 17 : \frac{7}{9},$$

$$19\frac{1}{4} \le \frac{17 - a_1 - a_2}{x} < 21\frac{6}{7}.$$

Интервалов длиной x было 20 или 21, что даёт 21 или 22 обгона соответственно.

358. Ответ: верно.

Выстроим рыцарей и лжецов в две шеренги и действуем так: берём первого лжеца и даём ему в пару знакомого ему рыцаря. Если такой есть, то отводим их в сторону. Берём следующего лжеца и действуем так же. Если таким способом удалось распределить всех лжецов, то утверждение задачи доказано.

Предположим, что какому-то лжецу $Л_1$ не досталось рыцаря. Обозначим всех его знакомых рыцарей $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Каждый из них достался какому-то другому лжецу (иначе достался бы лжецу $Л_1$). Следовательно, $Л_1$ знаком со всеми этими лжецами, поскольку у рыцаря все знакомые знакомы между собой. Таким образом, у $Л_1$ как минимум n знакомых лжецов. Противоречие, так как у лжеца знакомых лжецов должно быть меньше, чем знакомых рыцарей.

Следовательно, каждому лжецу можно дать в пару по рыцарю, то есть верно, что рыцарей на острове не меньше, чем лжецов.

359. Ответ: 6.

Пусть A, B, C — число школьников, решивших ровно одну соответствующую задачу, AB, BC и AC — ровно две, ABC — все три, см. рис. 2.

Тогда в наших обозначениях условие задачи запишется так:

$$A + B + C + AB + AC + BC + ABC = 25; \qquad (1)$$

$$B = 2C + BC; \qquad (2)$$

$$A = AB + ABC + AC + 1; \qquad (3)$$

$$A = B + C. \qquad (4)$$

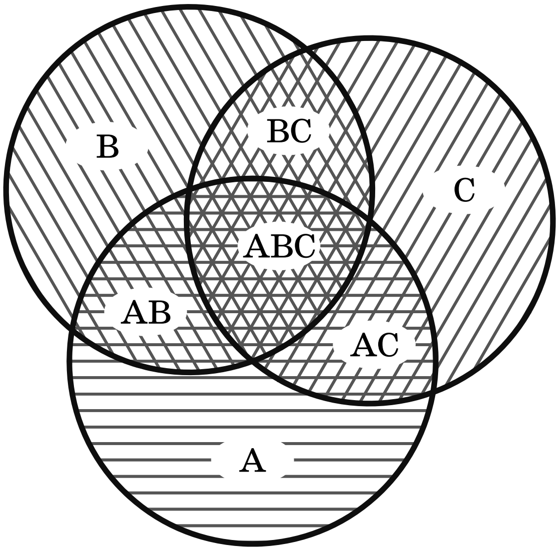


Рис. 2

Подставляя равенство (2) в (4), получим

$$A = 3C + BC.$$

Используя равенства (3) и (4), перепишем равенство (1) в виде

$$A + A + A - 1 + BC = 25, \text{ то есть } 3A + BC = 26.$$

Так как $A = 3C + BC$, получаем, что $9C + 4BC = 26$ и $C < 3$.

Далее находим (методом перебора), что $C = 2$ и $BC = 2$, а значит, $B = 6$.

360. Ответ: 4 и 13.

Итак, Феде известно произведение натуральных чисел $A \times B = P$, а Васе — сумма $A + B = S$, причём Федя не может угадать эти числа.

Какими могли быть числа, чтобы Федя мог их угадать, зная произведение? Это возможно лишь в том случае, когда P раскладывается на множители единственным способом (например, если числа A и B простые). Вася утверждает, что он знал заранее, что Федя не может угадать. Следовательно, S невозможно представить в виде суммы двух простых чисел.

1. Легко проверить, что любое чётное число, не превышающее 66, можно представить в виде суммы двух простых чисел. Проверьте это самостоятельно.

Несколько примеров: $66 = 5 + 61$, $64 = 3 + 61$, $62 = 3 + 59$.

2. $S \neq 3$, поскольку 3 нельзя представить в виде суммы натуральных чисел, бóльших 1.

3. Произведение, известное Феде, не может быть кратно простому числу $p > 33$, так как тогда P представляется единственным образом в виде произведения двух чисел (потому что сумма слагаемых не превосходит 66).

Например, каждое из чисел $354 = 6 \times 59$ и $236 = 4 \times 59$ позволяет Феде по произведению восстановить числа, и Вася, зная суммы 65 или 63, не мог однозначно утверждать, что Федя восстановить числа не может.

Аналогично отпадают суммы 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57 и 61, поскольку, зная произведения, можно однозначно восстановить числа A и B.

4. Некоторые нечётные числа можно представить в виде суммы двух простых чисел, если одно из слагаемых — число 2, некоторые нельзя.

Например, 59 невозможно представить в виде суммы двух простых чисел, поскольку $59 = 2 + 57$, а 57 кратно 3.

Тогда какие можно? Перебором убедимся, что можно представить в виде суммы двух простых следующие нечётные числа: $33 = 2 + 31$, $31 = 2 + 29$,

$25 = 2 + 23$, $21 = 2 + 19$, $19 = 2 + 17$, $15 = 2 + 13$, $13 = 2 + 11$, $9 = 2 + 7$, $7 = 2 + 5$, $5 = 2 + 3$, то есть сумма S не может быть равна следующим числам: 5, 7, 9, 13, 15, 19, 21, 25, 31, 33.

Для дальнейшего рассмотрения остались суммы 11, 17, 23, 27, 29, 35, 37.

5. Теперь воспользуемся вторым Фединым утверждением. Найдём, в каком случае, зная, что $A \times B = P$ и что сумма $A + B = S$ принимает одно из значений 11, 17, 23, 27, 29, 35, 37, Федя мог восстановить числа A и B.

Перебор можно выполнить следующим образом. Записываем возможные суммы в столбец. Справа, в строчку, выписываем варианты произведений для всех возможных разбиений на сумму двух слагаемых.

Варианты произведений, повторяющиеся в нескольких строках, зачёркиваем (это те произведения, по которым Федя не смог бы определить числа при своём втором ответе).

Если Федя может указать числа по их произведению, то это произведение должно встречаться только один раз среди произведений слагаемых, составляющих эти числа. Вася может назвать числа по их сумме только в случае, если этим числам соответствует одно «уникальное» произведение.

При этом нам необязательно в вариантах с суммой чисел 35, 37 рассматривать все возможные произведения (достаточно рассмотреть по 7 первых произведений для каждой суммы), потому что, как только выявляется второе «уникальное» произведение, становится ясно, что Вася по сумме чисел уже не сможет однозначно определить искомые числа.

Приведём соответствующую таблицу

S	Возможные варианты разложения
11	$2\cdot 9=18$, $3\cdot 8=24$, $4\cdot 7=28$, $\cancel{5\cdot 6=30}$,
17	$\cancel{2\cdot 15=30}$, $\cancel{3\cdot 14=42}$, $4\cdot 13=52$, $\cancel{5\cdot 12=60}$, $\cancel{6\cdot 11=66}$, $\cancel{7\cdot 10=70}$, $\cancel{8\cdot 9=72}$,
23	$\cancel{2\cdot 21=42}$, $\cancel{3\cdot 20=60}$, $4\cdot 19=76$, $5\cdot 18=90$, $\cancel{6\cdot 17=102}$, $7\cdot 16=112$, $\cancel{8\cdot 15=120}$, $\cancel{9\cdot 14=126}$, $10\cdot 13=130$, $\cancel{11\cdot 12=132}$,
27	$2\cdot 25=50$, $\cancel{3\cdot 24=72}$, $4\cdot 23=92$, $5\cdot 22=110$, $\cancel{6\cdot 21=126}$, $7\cdot 20=140$, $8\cdot 19=152$, $9\cdot 18=162$, $10\cdot 17=170$, $11\cdot 16=176$, $\cancel{12\cdot 15=180}$, $13\cdot 14=182$,
29	$2\cdot 27=54$, $3\cdot 26=78$, $4\cdot 25=100$, $\cancel{5\cdot 24=120}$, $6\cdot 23=138$, $7\cdot 22=154$, $8\cdot 21=168$, $\cancel{9\cdot 20=180}$, $10\cdot 19=190$, $11\cdot 18=198$, $12\cdot 17=204$, $13\cdot 16=208$, $\cancel{14\cdot 15=210}$,
35	$\cancel{2\cdot 33=66}$, $3\cdot 32=96$, $4\cdot 31=124$, $5\cdot 30=150$, $6\cdot 29=174$, $7\cdot 28=196$, $8\cdot 27=216$, ...,
37	$\cancel{2\cdot 35=70}$, $\cancel{3\cdot 34=102}$, $\cancel{4\cdot 33=132}$, $5\cdot 32=160$, $6\cdot 31=186$, $\cancel{7\cdot 30=210}$, $8\cdot 29=232$, ...

Так, если сумма чисел равна 11, то возможные произведения: $2 \cdot 9 = 18$, $3 \cdot 8 = 24$, $4 \cdot 7 = 28$, $5 \cdot 6 = 30$, однако произведение чисел, равное 30, возможно и при другой сумме чисел ($2 \cdot 15 = 30$ — сумма равна 17). Первые три произведения «уникальны», то есть не могут быть получены при суммах других чисел, и Федя может по ним определить искомые числа. Но поскольку их больше одного, Вася по сумме не может однозначно определить эти числа.

Искомая сумма равна 17, поскольку остальным суммам не соответствуют «уникальные» произведения. Единственное «уникальное» произведение — это 52.

Проверим, подходят ли эти числа.

Вася знает сумму 17, а Федя — произведение 52. Федя не может определить множители, так как $52 = 4 \cdot 13 = 2 \cdot 26$. Вася знает заранее о невозможности определения чисел Федей, так как 17 не представимо в виде суммы двух простых чисел. Узнав о том, что Вася знает заранее, что у Феди числа составные, Федя исследует возможные суммы своих сомножителей $4 + 13 = 17$, $2 + 26 = 28$.

28 представимо как $23 + 5$ (сумма двух простых чисел), а 17 — нет. Значит, Федя может назвать числа 4 и 13.

Вася рассматривает возможные произведения слагаемых:

$$2 \cdot 15 = 30 = 5 \cdot 6,$$

$$3 \cdot 14 = 42 = 21 \cdot 2,$$

$$4 \cdot 13 = 52 \text{ уникально},$$

$$5 \cdot 12 = 60 = 20 \cdot 3,$$

$$6 \cdot 11 = 66 = 33 \cdot 2,$$

$$7 \cdot 10 = 70 = 35 \cdot 2,$$
$$8 \cdot 9 = 72 = 3 \cdot 24.$$

Таким образом, Вася тоже угадывает числа 4 и 13.

361. Ответ: можно.

Пронумеруем монеты $a_1, \dots a_{15}$ так, чтобы заведомо настоящей была монета a_{10}.

Первое взвешивание.

Левая чашка: монеты a_1, a_2, a_3, a_4, a_5; правая чашка: монеты a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}.

1. Если весы в равновесии, то фальшивая монета находится среди монет $a_{11}, \dots, a_{15}$.

Второе взвешивание.

Левая чашка: a_{11}, a_{15}; правая чашка: a_{10}, a_{12}.

Если весы в равновесии, то фальшивая монета — либо a_{13}, либо a_{14}, и, сравнив одну из них с настоящей монетой a_{10} (третье взвешивание), найдём фальшивую монету.

Если тяжелее груз на правой чашке (случай, когда тяжелее груз на левой чашке, рассматривается аналогично), то фальшивой может оказаться либо одна из монет a_{11} и a_{15} из «лёгкой» чашки, либо a_{12} из «тяжёлой».

Сравним между собой a_{11} и a_{15} (третье взвешивание) и тем самым выявим фальшивую монету.

2. Если левая чашка тяжелее, то монеты $a_{11}, \dots, a_{15}$ настоящие, а фальшивая — среди девяти монет, лежащих на весах.

Второе взвешивание.

Левая чашка: монеты a_1, a_2, a_6; правая чашка: монеты a_3, a_4, a_7.

Если весы в равновесии, то фальшивая — среди монет a_5, a_8, a_9, причём если фальшивая монета — a_5, то она «лёгкая», а если a_8 или a_9, то «тяжёлая». Найдём фальшивую монету, сравнив a_8 и a_9 (третье взвешивание).

Если левая чашка тяжелее правой (случай, когда тяжелее правая, рассматриваем аналогично), то фальшивая — среди монет a_1, a_2 из «тяжёлой» или a_7 из «лёгкой» чашки. Сравним монеты a_1 и a_2 (третье взвешивание).

3. Если груз на левой чашке легче, то поступаем аналогично второму случаю.

362. Ответ: 1340.

Решим задачу в общем виде для доски $n \times n$. Посчитаем, сколько всего клеток в строках и в столбцах покрыто доминошками. Таких будет ровно $2n$. Одна доминошка закрывает три линии (две по вертикали и одну по горизонтали или наоборот). Следовательно, доминошек должно быть не менее чем $\frac{2n}{3}$ штук.

1. Если n кратно 3, то укладываем фигуры, изображённые на рис. 3, «по диагонали» квадрата $n \times n$. В этом случае понадобится $\frac{2n}{3}$ доминошки.

2. Если n при делении на 3 даёт остаток 1, то укладываем фигуры, изображённые на рис. 3, «по диагонали» квадрата $n \times n$, до тех пор пока это возможно, после чего выкладываем фигуру, изображённую на рис. 4. В этом случае понадобится $2 \cdot \frac{n-4}{3} + 3$ доминошки.

3. Если n при делении на 3 даёт остаток 2, поступаем аналогично предыдущему, но последней выкла-

дываем фигуру, изображённую на рис. 5. В этом случае понадобится $2 \cdot \dfrac{n-5}{3} + 4$ доминошки.

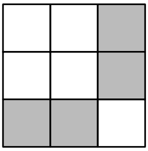


Рис. 3

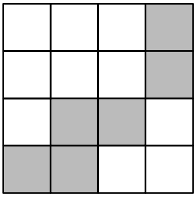


Рис. 4

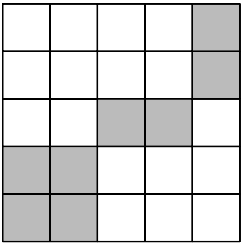


Рис. 5

Можно проверить, что для доски 2009×2009 потребуется 1340 доминошек.

363. Ответ: а) да; б) да.

Обратим внимание на то, что для решения задачи нам необходимо уменьшить сторону исходного квадрата более чем в 1000 раз.

а) Заметим, что из квадрата, разрезав его на 4 равные части, можно получить 4 квадрата, то есть на 3 больше. При этом сторона квадрата уменьшилась в 2 раза. Разрезав один из четырёх квадратов на четыре равные квадрата, получим $3 + 3 + 1 = 3 \cdot 2 + 1 = 7$ квадратов, то есть ещё на 3 больше. Повторяя подобную операцию деления одного из «новых» квадратов на 4 равных, мы будем каждый раз увеличивать количество квадратов на 3. После 10-го разрезания мы получим $3 \cdot 10 + 1 = 31$ квадрат, и сторона наименьшего квадрата окажется в $2^{10} = 1024$ раза меньше стороны исходного, то есть уменьшится более чем в 1000 раз и станет меньше 1 мм.

Возможны и другие способы разрезания.

б) Рассмотрим два способа разрезания квадрата.

1. Разделим квадрат на 11 маленьких квадратов (см. рис. 6), причём длина стороны наименьшего квадрата в 11 раз меньше стороны исходного квадрата.

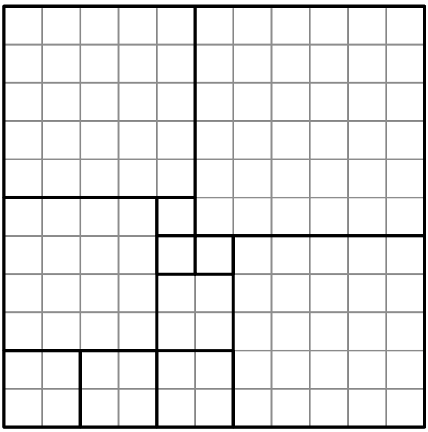


Рис. 6

2. Разделим квадрат на 10 маленьких квадратов (см. рис. 7), причём длина стороны наименьшего квадрата в 9 раз меньше стороны исходного квадрата.

Покажем, как добиться требуемого.

Разрежем квадрат на 11 квадратов, а затем один из получившихся наименьших квадратов ещё раз на 11 (способ 1). Получим 21 квадрат, у трёх из которых сторона в $11^2 = 121$ раз меньше стороны исходного квадрата. Разрезав один из этих квадратов на 10 частей (способ 2), мы получим ровно 30 квадратов, при этом стороны трёх наименьших квадратов будут меньше стороны исходного квадрата в $11^2 \cdot 9 = 1089$ раз, то есть будут меньше 1 мм, что и требовалось.

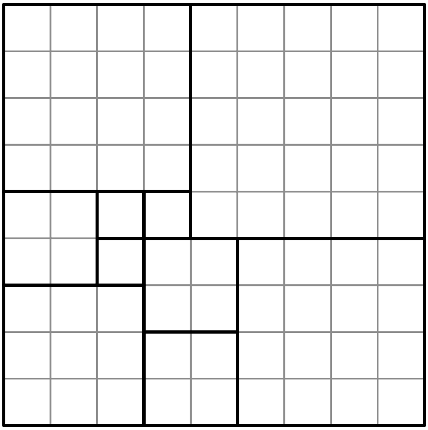


Рис. 7

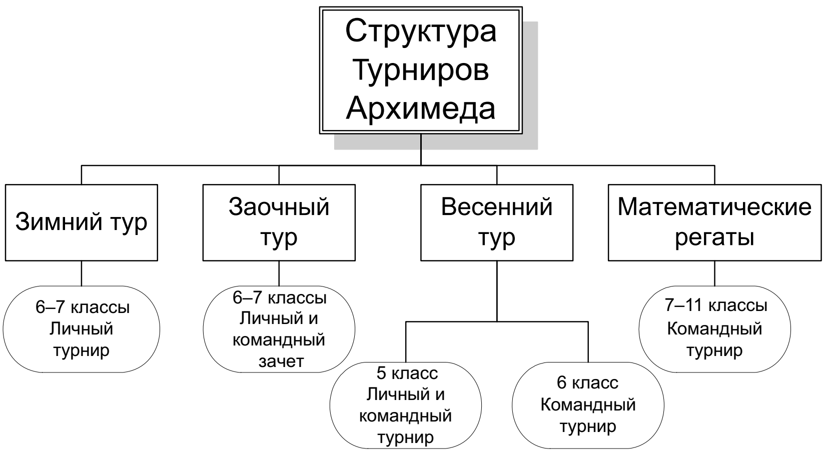
Приложения

Приложение 1

Структура Турниров Архимеда

В настоящее время Турниры Архимеда представляют собой систему соревнований, в которых ежегодно участвуют примерно четыре тысячи школьников.

1. Соревнования по математике



Зимний тур (январь) — личная олимпиада для учащихся шестых и седьмых классов.

В последние годы организуется физико-математической школой № 2007 совместно со школами Москвы и Московской области.

Продолжительность соревнования (включая награждение победителей) — 5 часов.

Заочный тур (январь-май) — личная олимпиада для учащихся шестых-седьмых классов (предусмотрен зачёт для команд математических кружков). Проводится с 1993 года. В 1996 году поддержан газетой «Математика» (редакторы — Иосефа Львовна Соловейчик, Виктор Тимофеевич Лисичкин, Лариса Олеговна Рослова).

Весенний тур (апрель) — лично-командная олимпиада для учащихся пятых-шестых классов, проводится в первые выходные апреля начиная с 1993 года.

Для пятиклассников — зачёт индивидуальный и командный, для шестиклассников — только командный (в команде не более 8 человек).

Продолжительность (включая награждение победителей) — 3 часа.

Подробнее: Чулков П. В., Новодворская Е. А., Пчелинцев Ф. А., Обрубов А. С, Струков Т. С., Федулкин Л. Е., Федулкина Е. М. Весенний турнир Архимеда. — М.: МЦНМО, 2009. — 416 с.

Математические регаты (октябрь-апрель) — командные соревнования школьников 7–11 классов (в составе команды — 4 человека) в коллективном письменном решении математических задач. В системе Турниров Архимеда с 1998/1999 учебного года.

Продолжительность (включая награждение победителей) — 3–4 часа.

Подробнее: Блинков А. Д., Горская Е. С., Гуровиц В. М. Московские математические регаты. Часть 1. 1998–2006. — М.: МЦНМО, 2014.

Блинков А. Д. Московские математические регаты. Часть 2. 2006–2013. — М.: МЦНМО, 2014

2. Соревнования по программированию

Турнир Архимеда по программированию для «непрофессионалов» организовал Владимир Михайлович Гуровиц (координатор турнира в 2006–2014 годах).

Для мероприятия была выбрана командная форма как более увлекательная и обучающая (школьники обучаются в общении друг с другом) форма. С 2006 года турнир проводится в Москве, а в 2010 году он впервые был проведён и в других городах России, Украины, Белоруссии.

Турнир проводится по традиционным для командных олимпиад правилам (ACM ICPC): засчитываются только верно решённые задачи, при подведении итогов учитывается количество решённых задач, а при равном количестве задач — «штрафное время».

Задачи турнира рассчитаны на самый широкий круг участников: они в большинстве своём не требуют знаний математики, выходящих за рамки программы 6–7 класса, а также доступны школьникам, не овладевшим целиком ещё даже основами языка программирования (например, школьникам, не владеющим строками или двумерными массивами, будут доступны большинство задач).

Турнир включает в себя открытие (рассказ о правилах командных олимпиад и об особенностях проверки олимпиадных задач), пробный тур (знакомство с техникой и тестирующей системой), основной тур, разбор задач и награждение победителей.

В 2015 году координатор турнира — Валерия Юрьевна Петрова (Фоксфорд, Санкт-Петербург).

В 2016/2017 учебном году координатор — Лидия Марковна Перовская (ИТМО, Санкт-Петербург).

С 2016 года олимпиада проводится на платформе Яндекс.Контест.

Подробнее: http://arhimedes.org/index.php?id=informatics.

3. Соревнования по экономике

Турнир Архимеда по экономике для школьников 5–6 классов организуется школой № 2007. Продолжительность соревнования (включая награждение победителей) — 2,5 часа.

Школьникам предлагаются 10 заданий: из них 5 в тестовой форме и 5 задач экономико-математического содержания.

Цель — привлечь внимание школьников 5–6 классов к предмету «Экономика».

Для участия в турнире необходима предварительная регистрация, проводимая на сайте http://arhimedes.org за 7–10 дней до соревнования.

Первый турнир прошёл 31 января 2016 года в Физматшколе № 2007. В олимпиаде приняли участие 65 школьников из 17 школ Москвы и Лицея г. Одинцово. По итогам 13 участников награждены дипломами и призами.

Во Втором турнире (29 января 2017 года) приняли участие более 240 школьников Москвы и Московской области. По итогам 35 участников награждены дипломами и призами.

Подробнее: http://arhimedes.org/index.php?id=economics.

Приложение 2

Сведения о состоявшихся турнирах

В приложении представлена информация о дате проведения турнира, месте, количестве участников турнира (школ), количестве участников, награждённых дипломами.

При подготовке материалов были использованы материалы из архивов оргкомитета Турниров Архимеда. Поэтому некоторые представленные сведения могут отличаться от опубликованных ранее, а некоторые представлены впервые.

Впервые соревнование с таким названием состоялось в январе 1992 года в школе № 5 (ЮЗАО, г. Москва) по инициативе учителей школы и преподавателей Московского авиационно-технологического института им. К. Э. Циолковского (ныне Российский государственный технологический университет им. К. Э. Циолковского («МАТИ»)).

В оргкомитет первых турниров входили сотрудники школы: Т. Е. Маркелова (директор), А. В. Егоров, А. И. Щербакова, В. В. Шмаль, В. И. Тураева, Л. М. Жукова, В. Н. Лебедев, Н. А. Юрченко, А. И. Потапов, П. В. Чулков, преподаватели МАТИ доценты Ю. В. Селиванов и Т. В. Рамоданова, а также старшеклассники школы № 5: Дмитрий Нистратов, Роман Лепешков, Фёдор Пчелинцев, Евгений Шапарин, Татьяна Куликова, Ольга Кузьмина.

	Дата	Количество участников	Школ	Награждено дипломами
I	26.01 1992	348	45	I — 14 II — 19
II	24.01 1993	379	55	I — 18 II — 5
III	23.01 1994	351	52	I — 4 II — 6 III — 10
IV	22.01 1995	397	67	I — 4 II — 11 III — 18

Следующие восемь турниров (с V по XII) принимал центр образования № 109 Москвы (директор — Е. А. Ямбург).

В оргкомитет вошли сотрудники школы: Л. Н. Слизовская, Л. И. Шипулина (заместители директора), Ф. А. Пчелинцев, Е. А. Шапарин, М. А. Мартиросян, М. А. Максимовская, Н. В. Васюк, Е. В. Слепенкова, М. А. Бойцова, О. Ф. Хачатурова, Е. И. Симагина, Е. Л. Синцова, Н. Ю. Решетник и другие.

В число организаторов турнира в этот период вошли школьники и выпускники Тимофей Струков, Анатолий Обрубов, Анастасия Зайцева, Виталий Будич, Александр Воротнюк и другие.

	Дата	Количество участников	Школ	Награждено дипломами
V	28.01 1996	416	61	I — 11 II — 20 III — 27
VI	19.01 1997	551	78	I — 10 II — 20 III — 34
VII	18.01 1998	466	60	I — 11 II — 25 III — 43
VIII	17.01 1999	871	124	I — 11 II — 18 III — 48
IX	16.01 2000	634	108	I — 10 II — 22 III — 32
X	21.01 2001	924	120	I — 11 II — 15 III — 39
XI	16.01 2002	1052	197	I — 2 II — 6 III — 49

В настоящее время (начиная с XIII турнира) соревнования организует физико-математическая школа № 2007 (директор — А. В. Бунчук, с 2015 года — С. Г. Старовойт) совместно с школой № 2009 (директор — Д. М. Гесслер).

В состав оргкомитета вошли Е. А. Новодворская, О. Е. Данченко, Е. А. Емельянова, Т. Н. Харютина, В. В. Ховрина, Г. Е. Полянская, Т. П. Волкова, Е. Ф. Шершнев, Е. А. Шапарин, Т. С. Струков, А. С. Обрубов, Б. Д. Аминев, Д. В. Прокопенко, Ф. А. Пчелинцев, А. В. Шевкин, В. М. Гуровиц, Л. В. Курахтенков, Н. А. Ленская, Е. Е. Кармакова, Э. И. Махмутова, Н. Н. Рыбакова, Т. А. Адрианова, Д. Н. Нистратов, Е. Г. Лысёнок, Н. В. Иванова, Н. Б. Волкова, А. В. Чехович, О. М. Трескунова, А. Б. Калинина, М. А. Сазонова, П. К. Никитина, О. А. Глюз, Ю. А. Полянская, К. В. Линёв, Н. З. Трямкина, А. А. Закирова, Ю. В. Коровкин, В. М. Ускорева, А. Б. Уединов, О. И. Новикова, О. Г. Деркач, И. В. Буянина, М. П. Федорович, Т. Э. Останькович, И. Б. Писаренко, Е. В. Корзунина.

	Дата	**Количество участников**	**Школ**	**Награждено дипломами**
XIII	18.01 2004	521	97	I — 5 II — 9 III — 32
XIV	16.01 2005	706	120	I — 2 II — 14 III — 33
XV	22.01 2006	541	130	I — 4 II — 11 III — 23
XVI	21.01 2007	859	133	I — 7 II — 21 III — 49

В дальнейшем в организации турниров принимали участие:

— XVII, XIX, XXI–XXVI турниры — лицей № 1568 СВАУО Москвы (директор — В. П. Кулешов);

— XXII и XXIV турниры — лицей № 1557 г. Зеленограда (директор — Т. Н. Грабарник);

— XXIII–XXVI турниры — школа № 1354 (директор — А. Л. Постникова);

— XXIII и XXV турниры — школа № 6 г. Мытищи (директор — Л. А. Ляпина).

В XXVI турнире среди организаторов впервые школа № 12 г. Химки Московской области (директор — Л. В. Нестеренко) и Кировский физико-математический лицей (КФМЛ) (директор — М. В. Исупов).

	Дата и школы	**Количество участников**	**Школ**	**Награждено дипломами**
XVII	20.01 2008	980	164	I — 22 II — 41 III — 47
XVIII	18.01 2009	1173	185	I — 9 II — 31 III — 100
XIX	24.01 2010	1354	240	I — 17 II — 146 III — 93
XX	23.01 2011	1131	192	I — 7 II — 34 III — 112

XXI	22.01 2012	1509	261	I — 29 II — 63 III — 112
XXII	20.01 2013	1775	259	I — 3 II — 24 III — 96
XXIII	19.01 2014	1766	240	I — 3 II — 19 III — 87
XXIV	18.01 2015	1734	206	I — 10 II — 64 III — 135
XXV	17.01 2016	1636	172	I — 17 II — 33 III — 139
XXVI	15.01 2017	1945	185	I — 18 II — 55 III — 162

Информация об участниках турнира

Помимо москвичей в соревнованиях участвовали школьники из населённых пунктов Московской области. Были представлены: Апрелевка, Балашиха, Видное, Дедовск, Дзержинский, Долгопрудный, Домодедово, Дубна, Железнодорожный, Жуковский, Климовск, Клин, Коломна, Королёв, Красногорск, Краснознаменск, Куровское, Лобня, Люберцы, Мытищи, Ногинск, Одинцово, Орехово-Зуево, Пересвет, Подольск, Протвино, Пушкино, Раменское, Реутов, Сергиев Посад, Серпухов, Ступино, Троицк, Фрязино, Черноголовка, Химки, Хотьково, Щербинка, Электрогорск, Юбилейный, а также Ашукино, Нахабино, Оболенск, Успенское.

В турнире регулярно участвуют представители других регионов России и ближнего Зарубежья. Были представлены: Минск, Брянск, Чебоксары, Саров, Санкт-Петербург, Липецк, Рязань, Обнинск, Киров, Тверь, Иваново, Нижний Новгород, Тамбов.

Заочный турнир

Первый заочный конкурс был проведен в 1993 году. Он был задуман как подготовка к «старшему» зимнему турниру. Однако регулярно он стал проводиться только с 1996/1997 учебного года после появления информационного партнёра — газеты «Математика» (издательский дом «Первое сентября»).

В 2016/2017 учебном году соревнование не проводилось в связи с реорганизацией журнала «Математика».

Ежегодно в конкурсе решения задач принимали участие до 800 школьников из многих регионов России, а также других стран.

Наибольший вклад в проведение олимпиады внесли Е. А. Новодворская, А. С. Обрубов, Ф. А. Пчелинцев, Т. С. Струков, Е. А. Шапарин, Е. Ф. Шершнев.

Кроме них в подборе и обсуждении задач, а также проверке работ участников в разные годы участвовали А. С. Воротнюк, А. Н. Зайцева, О. Е. Данченко, И. Н. Климчук, И. В. Простов, Б. Д. Аминев, П. П. Камаев.

№	Учебный год	Прислано работ	Регионов РФ	Победители и призёры
II	1992/1993	100	2	15
VI	1996/1997	302	58	53 + 3 кружка
VII	1997/1998	281	40	35
VIII	1998/1999	538	53	32 + 2
IX	1999/2000	331	45	27 + 2
X	2000/2001	497	51	29 + 2
XI	2001/2002	422	48	50 + 2
XII	2002/2003	507	47	63 + 4
XIII	2003/2004	303	42	44 + 2
XIV	2004/2005	128	23	18 + 1
XV	2005/2006	757	63	76 + 2
XVI	2006/2007	301	44	29 + 3

XVII	2007/2008	350	54	48 + 4
XVIII	2008/2009	534	57	37 + 3
XIX	2009/2010	366	40	50 + 2
XX	2010/2011	430	50	44 + 4
XXI	2011/2012	170	30	18 + 3
XXII	2012/2013	166	31	15 + 3
XXIII	2013/2014	135	22	15 + 1
XXIV	2014/2015	96	23	12
XXV	2015/2016	77	18	13

Примечание: в рамках I, III–V, XXVI Турниров Архимеда заочный турнир не проводился.

За годы проведения заочного турнира в нём приняли участие школьники из 80 регионов России, из бывших республик СССР: Азербайджана, Армении, Беларуси, Казахстана, Литвы, Украины, Эстонии, а также из дальнего зарубежья: Болгарии, Монголии, Вьетнама, Китая.

Другие сведения о Турнирах Архимеда можно найти на сайте www.arhimedes.org.

Приложение 3

Технологии подготовки и проведения

Об организации зимнего турнира

Информация о турнире

Информация о турнире представлена на сайтах «Турниры Архимеда» (www.arhimedes.org), друзей школы 2007 (www.fmsh2007.ru), «Олимпиады для школьников» (www.olimpiada.ru). Многие годы информация о турнирах печаталась на страницах газеты «Математика» (Издательский дом «Первое сентября»).

Школьникам (участникам олимпиад прошлых лет) и их учителям рассылаются приглашения по электронной почте (ранее использовалась обычная почта, телефонограммы в школы и т. п.).

Составление варианта

Подбор задач для варианта представляет собой одну из самых важных частей подготовки турнира.

При этом мы решили, что вариант должен состоять из шести заданий разной трудности.

1. Вариант должен быть посильным, то есть задачи желательно подобрать так, чтобы одну-две из них могли решить не меньше половины участников олимпиады (в том числе пятиклассники!), а решение не требовало длинных записей (за 3 часа требуется проверить более 1000 работ!).

2. Тематика задач должна мало изменяться от года к году (что оставляет возможность подготовки — «обучающий» фактор).

Наши темы: традиционные арифметические задачи на движение и совместную работу, наглядно-геометрические задачи, задачи на делимость и остатки, логические и алгоритмические задачи

При этом спортивный интерес олимпиады не снижается, так как выбор задач по указанным темам достаточно велик.

3. Задачи, предлагавшиеся на турнире, как правило, не новы, некоторые прямо заимствованы; мы не стремились во что бы то ни стало включать оригинальные задачи.

4. К задачам пишутся решения и разрабатываются примерные критерии проверки для жюри. Каждая задача «оценивается» в баллах в зависимости от её предполагаемой трудности.

Подготовка печатных материалов и призов

Для проведения соревнования оргкомитетом готовятся печатные материалы: инструкции, протоколы, карточки участников, тексты заданий (см. Приложение 4), готовятся к печати макеты дипломов и приобретаются призы (книги по математике, физике, информатике).

В день турнира

В этот день у организаторов много работы, отметим лишь некоторые важные моменты.

1. В вестибюле школы вывешивается график проведения турнира.

Время	Школьники	Жюри
9.30—10.00	Сбор и регистрация участников, распределение по кабинетам	Изучение заданий. Обсуждение критериев проверки
10.00—12.00	Личный тур Решение задач	
12.00—15.30	Культурная программа для школьников	Проверка заданий
15.30—16.30	Награждение победителей и призёров	Подведение итогов турнира оргкомитетом и жюри
15.30—17.00		

2. В 9.00 происходит инструктаж дежурных.

Дежурные в кабинете следят за порядком, раздают условия задач и карточки участников, составляют протокол и так далее (см. Приложение 4).

3. Участники олимпиады работают по одному за партой и так, чтобы представители одной школы решали задачи в разных кабинетах (в ходе регистрации участник получает карточку с номером кабинета).

4. Учителя, сопровождающие школьников, работают в жюри или ожидают окончания турнира в специально выделенном помещении.

На этажи, отведённые для проведения олимпиады, никто из сопровождающих не допускается.

Проверка работ и апелляции

Пока школьники отдыхают (около 2–2,5 часов), жюри должно успеть проверить работы (более 1000 работ).

Работа жюри начинается в 10.00 с того, что проверяющие пытаются решить задачи самостоятельно. Инструктаж членов жюри начинается в 11.00 — в это время выдаются тексты решений и предполагаемые критерии проверки. После обсуждения и уточнения критериев председатель жюри разъясняет порядок работы.

Проверка работ проходит с 12.00 до 15.00. Обычно делается 2–3 проверки.

Первая проверка. Члены жюри работают в парах, каждый проверяет работы независимо, при необходимости консультируясь с соседом. Проверяющий оценивает каждое задание и выписывает результаты проверки на обложку работы, на которой приклеена личная карточка участника олимпиады (см. Приложение 4). Проверенные работы председатель жюри передает другой паре проверяющих для второй проверки.

Вторая проверка осуществляется аналогично. Если второй проверяющий согласен с оценками первого, то он подтверждает эти оценки своей подписью, подсчитывает сумму баллов и заносит результаты в протокол. Если имеются разногласия, то окончательное решение принимается «специалистом по задаче» (назначенным заранее) или председателем жюри.

Затем в течение 30–40 минут небольшая группа наиболее опытных членов жюри производит перепроверку работ кандидатов в победители и призёры. Параллельно с ней другой группой перепроверяются работы, набравшие малое количество баллов.

Все изменения вносятся в протоколы, составляется список победителей и призёров, выписываются дипломы победителей и призёров.

После окончания олимпиады (в течение двух недель) проводится просмотр всех работ на предмет возможных ошибок и опечаток при проверке (или просто забытых при выписывании дипломов призёрам). В случае выявления «упущенных» призёров они вносятся в список победителей и призёров (информация о времени получения диплома и призов высылается по электронной почте).

В течение трех следующих недель участники могут посмотреть свои работы или подать очные апелляции (по субботам).

Всем оставившим заявку на сайте «Турниры Архимеда» результаты проверки сообщаются по электронной почте.

Организация досуга

Пока жюри проверяет работы, школьникам предлагется культурная программа: чаще всего — кинофильм или полнометражный мультфильм, организована продажа математической литературы, развивающие игры. Так, в 2017 году проведена демонстрация развивающей игры — блочного конструктора Фанкластик (см. www.fanclastic.ru/contact.html).

Награждение победителей

Победители и призёры определяются по сумме набранных баллов. Награждаются приблизительно 10 % от общего числа участников.

Награждение обычно проводят администрации школ-организаторов и представители жюри.

Дипломами Турнира Архимеда и математической литературой награждаются призёры и победители соревнований (каждого вызывают на сцену).

По традиции каждый участник олимпиады, проработавший более часа, получает брошюру, подготовленную коллективом редакции «Архимед». В такие брошюры входит информация о предыдущем турнире (задачи, решения, список призёров, состав жюри, текст условий заочного конкурса).

Анализ и статистика

После окончания олимпиады подводятся итоги соревнования. Для этого в специальную базу вносятся все результаты каждого участника и информация об участнике.

В конце подводятся статистические данные олимпиады и делаются заметки по поводу возможности улучшения работы оргкомитета. Информация размещается на сайте «Турниры Архимеда».

Об организации заочного турнира

Особенность заочного конкурса состоит в том, что это единственное соревнование, которое проводится не в один день.

Участникам предлагается решить восемь задач.

Формирование задач имеет свою специфику, так как участники в процессе решения задач могут работать с математической литературой (что неплохо). Поэтому в вариант можно включать задачи исследовательского характера, которые требуют подробного и кропотливого рассмотрения (многие из таких задач вошли в шестую главу данной книги).

Как и в зимнем турнире, вариант составляется из трёх-четырёх «лёгких» задач (которые могли бы решить в том числе и пятиклассники), двух-трёх задач «средней» сложности и двух-трёх «сложных».

Оповещение участников осуществляется так же, как и на зимнем турнире.

При рассылке приглашений на зимний турнир школьникам высылаются и условия заочного турнира. Кроме того, условия задач публикуются в журнале (ранее газете) «Математика» (издательский дом «Первое сентября»), на сайтах «Турниры Архимеда» (www.arhimedes.org) и «Олимпиады для школьников» (www.olimpiada.ru), а также в брошюрах, которые раздаются всем участникам зимнего турнира.

В олимпиаде предусмотрен отдельный зачёт для команд математических кружков.

Олимпиада проводится в декабре — марте.

Окончание приёма решений заданий обычно ограничивается началом или концом марта (в зависимости от номера журнала «Математика», в котором публикуются условия).

Проверка работ происходит в марте — мае.

Письма с решениями можно посылать на адрес журнала, а также на сайт «Турниры Архимеда» (там для приёма работ создана специальная форма). Проверку всех работ осуществляют три-пять человек из состава оргкомитета.

По мере проверки всем участникам высылаются результаты проверки (как правило, в конверте самого участника, который присылается вместе с решениями задач).

Подведение итогов олимпиады происходит в конце апреля — начале мая. Как и в зимнем турнире, награждаются 10 % участников.

Победители и призёры получают диплом и брошюру с материалами заочного конкурса, а также брошюры с заданиями и решениями математических регат.

Рассылку дипломов и призов осуществляла редакция журнала «Математика».

Приложение 4

Материалы Турниров Архимеда (зимний тур)

Инструкция дежурного по кабинету

Кабинет № _____ .

1. Школьники под руководством дежурного должны заполнить именные карточки (ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ). Фамилию и имя писать в ИМЕНИТЕЛЬНОМ ПАДЕЖЕ. Карточки наклеивать на тетрадь. Проверить разборчивость.

Если школьник не помнит индекса, № телефона и т. п. — не важно.

2. Работа пишется на бумаге школьника (если потребуется — выдать из запасов, которые принесёт специально назначенный человек). Попросите, если работа пишется не в тетради, а на листах, ПОДПИСАТЬ КАЖДЫЙ ЛИСТ (хотя бы фамилию).

3. После того как работы подписаны, раздать всем условия. На вопросы школьников ПО УСЛОВИЮ ЗАДАЧ НЕ ОТВЕЧАТЬ — ответит ответственный член жюри (сам придёт). Если не хватило условий, их принесёт ответственный член жюри. Начало олимпиады — 10.00.

4. Сразу после начала работы заполнить протокол. ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ: фамилию, имя, школу, класс всех учеников (спросить город — если не Москва, то записать этот город в протокол) — и подпи-

сать протокол. Протокол должен быть заполнен не позже, чем через 30 минут после начала олимпиады.

5. При сдаче работы проверяется правильность оформления. Если что-то неправильно — поправить. Проверить соответствие фамилии, имени и т. п. написанному в протоколе. Проверить наличие номера кабинета на обложке, если нет — написать. Условия задач остаются школьнику.

Если школьник выходит из аудитории — работа сдаётся дежурному.

ВСЕ РАБОТЫ, В ТОМ ЧИСЛЕ И ПУСТЫЕ, ДОЛЖНЫ БЫТЬ ПОДПИСАНЫ И СДАНЫ.

6. После сдачи всех работ отнести их вместе с протоколом в кабинет _____.

7. Отсчёт времени (2 часа) ведётся с того момента, как розданы условия задач.

Желательно нарисовать на доске часы, объявить время начала и конца и 3–4 раза в час «переводить стрелки».

8. Объявить, что после проведения олимпиады в актовом зале будет показано кино. Награждение состоится в 15.00 в школе №______.

9. Все вопросы по инструкции можно задать человеку, который будет пояснять условия задач.

СПАСИБО ЗА РАБОТУ!

Карточка участника

Наклеить на обложку работы и подписать печатными буквами

Каб. ________

ТУРНИР АРХИМЕДА

Фамилия													
Имя													

Класс ☐ Школа ☐☐☐☐ (город) ____________________

Домашний адрес: Индекс ☐☐☐☐☐☐ ____________

____

____

____________________ **E-mail** ____________________

Ф.И.О. учителя математики: ____________________

____

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	Σ	Проверяющий

Приглашение на зимний тур Турнира Архимеда

21 января 2018 года

Московский государственный авиационно-технологический университет (МАТИ)

приглашает *Вас и Ваших друзей* принять участие в Олимпиаде по математике для учащихся 6–7 классов

Двадцать седьмой Турнир Архимеда

Начало в 10.00. По окончании Олимпиады — культурная программа и награждение победителей.

Для участия в Турнире рекомендуется ЗАРЕГИСТРИРОВАТЬСЯ на сайте Турниров Архимеда.

Сайт Турниров Архимеда: www.arhimedes.org.

По итогам регистрации Вам будет точно указано место проведения Турнира, дана подробная схема и даны рекомендации, как проехать (пройти) к месту проведения турнира.

Олимпиада проводится по следующим адресам.

Ул. Горчакова д. 9 корп. 1, школа **№2007**.

Схему проезда можно посмотреть на сайте:

http://www.fmsh2007.ru/index.php?id=address.

Ул. адмирала Руднева, д.16, корп. 1, школа **№2009**.

Схему проезда можно посмотреть на сайтах:

http://sch2009.ru/kontaktnaya-informatsiya/.

При себе иметь: *тетрадь, ручку и конверт с маркой (последнее необязательно)*.

Телефон: (495) 716-29-35

Приложение 5

Статистика задач Турниров Архимеда

В статистических данных не учтены результаты участников, не сдавших работы.

Пояснения к таблицам

Указан порядковый номер задачи в варианте и в книге (в скобках). Некоторые задачи заочного и школьного турниров в книгу не вошли.

Условия некоторых задач изменены (помечены *).

Трудность задачи (в баллах) — оценка трудности задачи, данная составителями.

Трудность задачи (в процентах) — отношение суммы баллов, набранных всеми участниками, к наибольшей возможной сумме, которую они могли набрать (в процентах).

Зимний тур

1992 год

Сдано 344 работы

№ задачи	1 (64*)	2 (205)	3 (113)	4 (248)	5 (73)	6 (188)
	Трудность задачи (в баллах)					
Набрано баллов	5	5	5	5	5	5
0	270	238	293	218	328	158
1	21	9	11	35	5	67
3	14	39	8	52	5	52
5	**39**	**58**	**32**	**39**	**6**	**67**
Трудность задачи (в %)	15	24,2	11,3	22,4	2,9	32,4

1993 год

Сдано 360 работ

№ задачи	1 (66*)	2 (100)	3 (299)	4 (75*)	5 (252)	6 (187)
	Трудность задачи (в баллах)					
Набрано баллов	2	3	3	4	5	3+3
0	180	306	164	210	303	162
1	61	20	116	136	28	79
2	**119**	5	28	5	20	24
3		**29**	**52**	2	6	49
4				**7**	1	11
5					**2**	4
6						**31**
Трудность задачи (в %)	41,5	10,8	30,4	12,5	5,6	18,2

1994 год

Сдано 349 работ

№ задачи	1 (63)	2 (306)	3 (114)	4 (226)	5 (174)	6 (37)
	Трудность задачи (в баллах)					
Набрано баллов	3	3	4	3	3	5
0	122	116	315	104	96	274
1	196	1	27	10	198	67
2	17	199	1	5	12	2
3	**14**	**33**	1	**230**	**43**	1
4			**5**			1
5						**4**
Трудность задачи (в %)	26	47,6	3,7	67,8	33,5	5,6

1995 год

Сдано 396 работ

№ задачи	1 (278)	2 (119)	3 (62)	4 (93)	5 (59)	6 (221)
	Трудность задачи (в баллах)					
Набрано баллов	2	4	4	5	5	10
0	97	272	95	303	193	292
1	6	15	77	68	138	84
2	**293**	7	66	7	4	1
3		9	157	1	7	3
4		**93**	**1**	1	53	8
5				**16**	**1**	0
6						0
7						0
8						0
9						1
10						**7**
Трудность задачи (в %)	74,8	27	43,2	8,5	19,4	5,2

1996 год

Сдано 416 работ

№ задачи	1 (279)	2 (18)	3 (94)	4 (108)	5 (220)	6 (212)
	Трудность задачи (в баллах)					
Набрано баллов	2	3	5	6	8	6
0	68	153	360	306	370	79
1	5	1	35	45	19	36
2	**343**	2	9	8	8	21
3		**260**	3	6	4	37
4			0	3	2	190
5			**9**	12	4	52
6				**36**	0	**1**
7					1	
8					**8**	
Трудность задачи (в %)	83	62,9	5,1	14,7	4,4	48,9

1997 год

Сдана 551 работа

№ задачи	1 (319)	2 (84)	3 (254)	4 (74)	5 (199)	6 (264*)
	Трудность задачи (в баллах)					
Набрано баллов	4	4	4	5	8	9
0	317	416	380	449	331	480
1	4	57	30	81	97	36
2	1	21	5	1	57	14
3	9	10	4	3	11	4
4	**220**	**47**	**132**	8	11	9
5				**9**	6	2
6					10	0
7					4	2
8					**24**	3
9						**1**
Трудность задачи (в %)	41,4	14,4	26,3	6,1	13,6	3,4

1998 год

Сдано 462 работы

№ задачи	**1 (145)**	**2 (261)**	**3 (39б)**	**4 (222)**	**5 (115)**	**6 (76*)**
	Трудность задачи (в баллах)					
Набрано баллов	5	6	6	2+5	2+6	8
0	361	236	309	434	372	441
1	63	76	1	6	18	6
2	9	39	1	9	57	2
3	4	43	0	1	7	4
4	9	35	146	5	2	1
5	**16**	8	3	2	0	1
6		**25**	**2**	1	5	2
7				**4**	0	0
8					**1**	**5**
Трудность задачи (в %)	9	22,1	22,2	2,8	5,4	2,2

1999 год

Сдано 855 работ

№ задачи	1 (294)	2 (45)	3 (130)	4 (318)	5 (207)	6 (325)
	Трудность задачи (в баллах)					
Набрано баллов	4	4	5	4+5	6	4+8
0	336	422	591	527	331	385
1	245	182	90	196	372	266
2	54	27	23	72	30	67
3	38	34	19	9	21	5
4	**182**	**190**	33	28	15	46
5			**99**	9	15	77
6				5	**71**	5
7				1		0
8				4		0
9				4		0
10						0
11						0
12						4
Трудность задачи (в %)	35	32,1	19,2	8,2	20,6	10,4

2000 год

Сдано 632 работы

№ задачи	**1 (320)**	**2 (6)**	**3 (240)**	**4 (83)**	**5 (191)**	**6 (50)**
	Трудность задачи (в баллах)					
Набрано баллов	3	3	5	5	6	8
0	544	340	213	322	384	619
1	1	32	168	61	48	6
2	2	220	43	188	158	1
3	1	13	42	18	26	2
4	1	**27**	**166**	6	7	1
5	7			5	0	0
6	**76**			7	**9**	1
7				**25**		0
8						**2**
Трудность задачи (в %)	13,3	24,5	41,3	17,1	13,8	0,8

2001 год

Сдана 921 работа

№ задачи	1 (30)	2 (171)	3 (239)	4 (182)	5 (338)	6 (255)
	Трудность задачи (в баллах)					
Набрано баллов	5	5	4	6	6	4+4
0	499	702	580	597	385	292
1	2	33	2	29	421	320
2	5	126	13	218	22	267
3	0	21	14	2	39	6
4	400	14	**312**	2	7	14
5	**15**	**25**		2	12	17
6				**71**	**35**	0
7						0
8						**5**
Трудность задачи (в %)	36,6	11,5	35,8	16,6	15,9	14,3

2002 год

Сдано 1046 работ

№ задачи	1 (14а)	2 (317)	3 (166)	4 (219)	5 (265)	6 (86)
	Трудность задачи (в баллах)					
Набрано баллов	3	4	6	5	10	8
0	492	976	1003	701	1035	877
1	0	3	23	64	6	157
2	2	0	3	66	3	2
3	**552**	0	12	50	1	2
4		**67**	2	48	1	1
5			3	**117**	0	4
6			**0**		0	1
7					0	1
8					0	**1**
9					0	
10					**0**	
Трудность задачи (в %)	52,9	6,5	1,4	21,5	0,2	2,5

2003 год

Сдано 449 работ

№ задачи	1 (1)	2 (138)	3 (224)	4 (259)	5 (223)	6 (41)
	Трудность задачи (в баллах)					
Набрано баллов	3	5	4	4+2	4+4	4+5
0	108	362	189	274	246	360
1	2	20	4	33	91	44
2	3	5	6	3	26	3
3	**336**	4	14	33	3	4
4		33	**236**	99	31	11
5		**25**		1	12	20
6				**6**	4	0
7					2	1
8					**34**	1
9						**5**
Трудность задачи (в %)	75,4	13,3	55,8	21,3	18	6,6

2004 год

Сдано 520 работ

№ задачи	1 (305)	2 (117)	3 (180)	4 (245)	5 (339)	6 (162)
	Трудность задачи (в баллах)					
Набрано баллов	4	4	5	5	6	8
0	364	401	358	499	107	442
1	50	31	48	13	220	47
2	5	14	81	3	189	13
3	0	6	8	0	0	2
4	**101**	**68**	4	1	2	5
5			**21**	**4**	0	2
6					**2**	2
7						5
8						**2**
Трудность задачи (в %)	22,3	16,8	13,6	1,6	19,8	4,1

2005 год

Сдано 703 работы

№ задачи	**1 (99)**	**2 (14б)**	**3 (319)**	**4 (3)**	**5 (273)**	**6 (29)**
	Трудность задачи (в баллах)					
Набрано баллов	3	5	4	2+3	6	5+3
0	364	685	659	469	522	623
1	115	4	24	3	158	42
2	13	14	6	162	5	3
3	**211**	0	1	31	3	3
4		0	12	4	0	5
5		**0**	**1**	**34**	1	25
6					**14**	0
7						0
8						**2**
Трудность задачи (в %)	36,7	0,9	3,2	17,2	6,3	3,9

2006 год

Сдана 541 работа

№ задачи	1 (285б)	2 (330)	3 (142)	4 (274)	5 (111)	6 (204*)
	Трудность задачи (в баллах)					
Набрано баллов	2	4	4	5	5	7
0	86	343	529	411	442	521
1	0	73	7	36	13	7
2	**455**	51	0	23	4	0
3		2	1	39	6	0
4		**72**	**4**	27	44	0
5				**5**	**32**	1
6						1
7						**11**
Трудность задачи (в %)	84,2	21,67	1,2	12,27	13,86	2,51

2007 год

Сдано 857 работ

№ задачи	1 (337)	2 (332)	3 (125)	4 (65)	5 (202)	6 (232)
	Трудность задачи (в баллах)					
Набрано баллов	3	3	4	5	6	7
0	155	481	235	551	642	691
1	27	75	176	244	120	2
2	3	27	24	20	20	8
3	**672**	**274**	32	5	11	0
4			**390**	4	19	3
5				**33**	7	0
6					**38**	5
7						**148**
Трудность задачи (в %)	79,7	37	54,8	11,2	10,4	18,3

2008 год

Сдано 979 работ

№ задачи	1 (146)	2 (307)	3 (77)	4 (201)	5 (341)	6 (234)
	Трудность задачи (в баллах)					
Набрано баллов	3	3	4	7	7	7
0	139	370	877	680	627	727
1	6	2	39	241	121	7
2	634	7	9	23	54	7
3	**200**	**600**	8	13	79	114
4			**46**	4	22	17
5				1	21	5
6				2	7	4
7				**15**	**48**	**98**
Трудность задачи (в %)	63,8	61,8	6,8	6,8	15,1	17

2009 год

Сдано 1173 работы

№ задачи	1 (58)	2 (316)	3 (78)	4 (236)	5 (237)	6 (104)
	Трудность задачи (в баллах)					
Набрано баллов	3	4	5	6	7	7
0	347	720	563	1098	1157	625
1	18	31	106	5	4	220
2	532	21	4	5	0	187
3	**276**	7	317	0	2	121
4		**394**	5	42	3	6
5			**178**	2	0	0
6				**21**	0	0
7					**7**	**14**
Трудность задачи (в %)	54,3	35,6	33,7	4,5	0,9	13,1

2010 год

Сдано 1353 работы

№ задачи	**1 (308)**	**2 (16)**	**3 (213)**	**4 (343)**	**5 (247)**	**6 (235)**
	Трудность задачи (в баллах)					
Набрано баллов	2	4	4	5	6	6
0	268	544	232	901	1306	581
1	76	91	128	2	13	10
2	**1009**	430	184	0	0	0
3		59	142	1	2	2
4		**229**	**667**	8	4	5
5				**441**	6	10
6					**22**	**745**
Трудность задачи (в %)	77,4	37,8	66,33	33,1	2,4	56,1

2011 год

Сдана 1131 работа

№ задачи	**1 (17)**	**2 (105)**	**3 (198)**	**4 (272)**	**5 (47, 48)**	**6 (286)**
	Трудность задачи (в баллах)					
Набрано баллов	3	4	5	5	7	8
0	465	606	110	818	1030	845
1	4	17	205	20	0	0
2	3	101	423	2	2	1
3	**659**	1	9	115	29	**283**
4		**406**	6	2	**56**	0
5			**378**	**174**	1	0
6					1	0
7					**12**	0
8						**2**
Трудность задачи (в %)	58,6	40,8	52,9	22	5,2	9,6

2012 год

Сдано 1509 работ

№ задачи	1 (12)	2 (280)	3 (141)	4 (40)	5 (178)	6 (192)
	Трудность задачи (в баллах)					
Набрано баллов	3	4	5	6+1	6	7
0	118	309	1268	1366	1034	1046
1	112	92	38	14	43	89
2	470	0	18	0	223	52
3	**809**	0	8	0	15	**129**
4		**1108**	15	0	**114**	73
5			**162**	1	10	12
6				107	**70**	22
7				**21**		**86**
Трудность задачи (в %)	76,8	75	12,8	10,4	19,4	22,1

2013 год

Сдано 1773 работы

№ задачи	1 (5)	2 (313)	3 (151)	4 (190)	5 (38)	6 (269)
	Трудность задачи (в баллах)					
Набрано баллов	2	3	5	5	7	7
0	722	914	1183	1590	1453	1726
1	25	265	405	12	284	1
2	1026	26	34	32	6	1
3		568	7	20	1	0
4			11	4	0	0
5			133	115	2	16
6					0	1
7					27	28
Трудность задачи (в %)	58,6	38	13,6	8,2	4	2,3

2014 год

Сдано 1765 работ

№ задачи	1 (291)	2 (140)	3 (271)	4 (192)	5 (336)	6 (87)
	Трудность задачи (в баллах)					
Набрано баллов	3	4	5	6	7	8
0	355	1052	467	1436	1747	1574
1	2	39	412	126	1	29
2	1	11	267	63	3	10
3	1407	27	48	0	1	54
4		636	15	33	0	78
5			556	3	1	2
6				104	0	1
7					12	3
8						14
Трудность задачи (в %)	79,8	38	44,5	9,7	0,8	4,8

2015 год

Сдано 1734 работы

№ задачи	**1 (281)**	**2 (112)**	**3 (195)**	**4 (138)**	**5 (9)**	**6 (275)**
	Трудность задачи (в баллах)					
Набрано баллов	3	4	5	6	7	8
0	366	836	913	1376	1506	1482
1	0	116	341	92	10	17
2	3	35	163	168	208	9
3	1365	20	100	4	3	18
4		727	41	36	1	11
5			57	16	0	56
6			119	42	0	20
7					0	15
8					6	106
Трудность задачи (в %)	78,84	44,58	12,57	5,58	0,19	10,58

2016 год

Сдано 1635 работ

№ задачи	1 (284)	2 (226)	3а (55а)	3б (55б)	4 (10)	5 (249)	6а (287а)	6б (287б)
	Трудность задачи (в баллах)							
Набрано баллов	4	5	3	3	6	6	4	4
0	537	1294	1382	1313	1456	1391	1623	1393
1	0	193	4	44	109	18	2	5
2	1	9	2	4	13	16	1	13
3	2	8	247	274	9	88	0	4
4	1095	6			28	4	9	220
5		125			1	8		
6					19	110		
Трудность задачи (в %)	67,1	10,8	15,3	17,8	4,01	10,5	0,61	14,1

Заочный тур

В 1992 году каждая задача оценивалась в 3 балла. С 1996 года каждая задача оценивается в 5 баллов.

1992/1993 учебный год

Сохранились сведения по 39 работам

№ задачи	1 (—)	2 (—)	3 (91)	4 (—)	5 (137)	6 (—)	7 (42)	8 (—)
	Набрано баллов							
0	23	24	6	21	21	20	10	4
1	0	1	1	3	0	3	0	0
2	5	1	0	6	0	8	2	3
3	**11**	**13**	**32**	**9**	**18**	**8**	**27**	**32**
Трудность задачи (в %)	35,9	35,4	82,6	33,8	46,2	34,4	72,3	86,7

1996/1997 учебный год

Прислано 302 работы

№ задачи	1 (11)	2 (293)	3 (196)	4 (22)	5 (49)	6 (28)	7 (346)	8 (242)
	Набрано баллов							
0	4	19	156	103	53	186	235	74
1	0	27	4	22	1	10	22	7
2	13	201	5	27	49	7	34	4
3	21	12	6	31	73	2	4	8
4	196	1	16	52	52	1	2	9
5	**68**	**42**	**115**	**67**	**74**	**96**	**5**	**200**
Трудность задачи (в %)	80,3	45	44,4	47,2	59,3	34	8,9	71,2

1997/1998 учебный год

Прислана 281 работа

№ задачи	**1 (—)**	**2 (20)**	**3 (—)**	**4 (181)**	**5 (—)**	**6 (347)**	**7 (185)**	**8 (333)**
	Набрано баллов							
0	97	40	111	158	39	99	58	214
1	23	12	5	15	27	29	5	4
2	45	26	4	23	91	84	4	10
3	31	42	10	4	66	50	7	1
4	9	33	17	5	9	12	6	4
5	**76**	**128**	**134**	**76**	**49**	**7**	**201**	**48**
Трудность задачи (в %)	44,3	68,5	55,6	33,7	49	30,6	75,7	20,1

1998/1999 учебный год

Прислано 538 работ

№ задачи	**1 (118)**	**2 (295)**	**3 (298)**	**4 (229)**	**5 (214)**	**6 (71)**	**7 (19*)**	**8 (186*)**
	Набрано баллов							
0	214	206	69	449	397	449	85	173
1	16	16	1	25	0	19	8	7
2	22	14	426	14	1	24	276	8
3	11	7	7	1	0	10	51	27
4	12	1	6	2	2	8	20	10
5	**263**	**294**	**29**	**47**	**138**	**28**	**98**	**313**
Трудность задачи (в %)	54,1	57,2	38,8	11,1	26	10	47,7	63,5

1999/2000 учебный год

Прислана 331 работа

№ задачи	1 (—)	2 (290)	3 (143)	4 (88)	5 (361)	6 (359)	7 (345)	8 (348)
	Набрано баллов							
0	52	46	194	136	305	254	268	326
1	78	4	39	169	2	1	35	1
2	9	0	8	12	4	3	5	4
3	12	0	81	0	6	5	4	0
4	9	2	4	2	0	0	2	0
5	**171**	**279**	**5**	**12**	**14**	**68**	**17**	**0**
Трудность задачи (в %)	61,8	85	20,5	15,8	5,9	21,9	9,1	0,5

2000/2001 учебный год

Прислано 497 работ

№ задачи	1 (251)	2 (107)	3 (297)	4 (85)	5 (328)	6 (95)	7 (—)	8 (324)
	Набрано баллов							
0	301	88	133	279	230	361	303	459
1	0	0	16	0	21	0	76	3
2	38	28	328	42	71	0	12	27
3	24	0	0	0	92	0	60	0
4	0	8	0	23	1	0	43	0
5	**134**	**373**	**20**	**153**	**82**	**136**	**3**	**8**
Трудность задачи (в %)	32,9	78,6	31,1	37,9	34,3	27,4	18,8	3,9

2001/2002 учебный год

Прислано 422 работы

№ задачи	1 (—)	2 (144)	3 (—)	4 (356)	5 (15)	6 (158)	7 (301*)	8 (323)
	Набрано баллов							
0	147	299	43	141	210	173	265	373
1	82	6	78	34	17	16	71	29
2	0	0	0	0	6	0	79	0
3	0	2	0	0	0	0	0	0
4	0	0	260	127	14	1	3	0
5	**193**	**115**	**41**	**120**	**174**	**232**	**4**	**20**
Трудность задачи (в %)	49,6	27,8	62,7	54,1	45,3	55,9	11,6	6,1

2002/2003 учебный год

Прислано 507 работ

№ задачи	1 (116)	2 (—)	3 (72)	4 (355)	5 (322а)	6 (322б)	7 (135)	8 (—)
	Набрано баллов							
0	341	106	67	234	85	240	255	228
1	1	35	129	113	82	62	4	84
2	1	0	56	0	0	0	86	0
3	0	153	188	59	1	47	3	120
4	9	66	0	0	0	0	1	0
5	**155**	**147**	**67**	**101**	**339**	**158**	**158**	**75**
Трудность задачи (в %)	32,1	58,9	45	31,4	70,2	39,2	38,6	32,3

2003/2004 учебный год

Прислано 303 работы

№ задачи	1 (19)	2 (157)	3 (29)	4 (332)	5 (—)	6 (—)	7 (170)	8 (—)
	Набрано баллов							
0	83	44	132	230	49	129	143	49
1	36	89	79	9	33	155	32	33
2	14	26	53	0	0	0	0	11
3	0	16	14	49	0	6	6	144
4	26	39	1	6	5	0	0	64
5	144	89	24	9	216	13	122	2
Трудность задачи (в %)	58,6	52,1	23,2	14,8	74,8	15,7	43,6	49,7

2004/2005 учебный год

Прислано 128 работ

№ задачи	1 (70)	2 (183)	3 (32)	4 (357)	5 (353)	6 (351)	7 (90)	8 (315)
	Набрано баллов							
0	12	69	25	71	60	96	80	59
1	3	1	11	0	4	4	2	1
2	0	6	0	4	28	18	0	0
3	0	0	19	27	12	9	6	13
4	0	0	0	1	0	1	0	0
5	113	52	73	25	24	0	40	55
Трудность задачи (в %)	88,8	42,7	67,7	34,1	33,8	11,1	34,4	49,2

2005/2006 учебный год

Прислано 757 работ

№ задачи	1 (176)	2 (147)	3 (167)	4 (194)	5 (292)	6 (354)	7 (260а)	8 (260б)
	Набрано баллов							
0	114	403	71	375	273	414	320	537
1	80	35	216	25	23	275	7	176
2	0	0	207	1	0	3	0	30
3	182	0	0	71	0	32	21	0
4	0	1	2	0	0	0	3	0
5	381	318	261	285	461	33	406	14
Трудность задачи (в %)	66,9	43	51,3	44	61,5	4,3	55,8	8,1

2006/2007 учебный год

Прислана 301 работа

№ задачи	1 (46)	2 (92)	3 (302)	4 (335)	5 (233)	6 (363)	7 (—)	8 (360*)
	Набрано баллов							
0	45	52	85	273	142	205	112	276
1	176	5	12	6	5	7	2	5
2	0	162	0	8	120	87	0	0
3	10	32	0	0	29	0	1	17
4	0	0	0	0	3	0	3	0
5	70	50	204	14	2	2	183	3
Трудность задачи (в %)	36,9	44,8	68,6	6,1	23,5	12,7	61,9	4,7

2007/2008 учебный год

Прислано 350 работ

№ задачи	1 (7)	2 (60)	3 (4)	4 (270а)	5 (270б)	6 (263)	7 (312)	8 (358)
	Набрано баллов							
0	47	104	46	138	176	221	88	263
1	187	100	32	104	117	55	4	69
2	0	0	30	0	0	0	0	12
3	0	0	145	0	0	40	0	3
4	0	0	5	0	0	1	0	0
5	116	146	92	108	57	33	258	3
Трудность задачи (в %)	43,8	47,4	57,5	36,8	23	19,7	73,9	6,7

2008/2009 учебный год

Прислано 534 работы

№ задачи	1 (56)	2 (163)	3 (311)	4 (—)	5 (310)	6 (200)	7 (362)	8 (350)
	Набрано баллов							
0	139	46	172	192	430	277	402	404
1	139	152	68	10	15	23	5	109
2	17	39	59	83	0	70	19	13
3	107	45	82	16	17	33	46	7
4	5	0	0	21	1	18	0	0
5	127	252	153	212	71	113	62	1
Трудность задачи (в %)	43	60,9	44,8	51,2	15,9	33,7	18,4	6

2009/2010 учебный год

Прислано 366 работ

№ задачи	1 (8)	2 (246)	3 (103)	4 (187)	5 (296)	6 (—)	7 (243)	8 (90)
	Набрано баллов							
0	17	117	157	105	49	229	193	184
1	1	15	6	7	0	6	1	9
2	186	25	1	78	0	21	0	0
3	0	189	0	2	0	97	0	1
4	0	0	23	0	0	0	0	0
5	162	20	179	174	317	13	172	172
Трудность задачи (в %)	64,6	40	54,4	56,8	86,6	22,1	47	47,7

2010/2011 учебный год

Прислано 430 работ

№ задачи	1 (101)	2 (321)	3 (170)	4 (25)	5 (26)	6 (148)	7 (300)	8 (253)
	Набрано баллов							
0	24	38	104	46	106	108	178	272
1	7	16	11	3	99	12	154	28
2	0	0	120	0	71	0	0	21
3	4	222	72	0	2	0	0	6
4	2	0	2	0	0	63	1	0
5	329	90	57	317	88	183	33	39
Трудность задачи (в %)	77,8	52,6	35,4	73,9	32	54,8	15	13,2

2011/2012 учебный год

Прислано 170 работ

№ задачи	**1 (215)**	**2 (226)**	**3 (123)**	**4 (96)**	**5 (157)**	**6 (34)**	**7 (256)**	**8 (257)**
	Набрано баллов							
0	64	80	70	101	29	114	127	116
1	0	31	12	8	18	25	20	34
2	4	0	0	1	34	8	0	0
3	19	28	0	0	1	5	0	0
4	0	0	1	0	22	0	0	0
5	84	31	87	60	66	18	23	20
Трудность задачи (в %)	57,1	31,8	53,1	36,5	59,6	17,2	15,9	15,8

2012/2013 учебный год

Прислано 166 работ

№ задачи	**1 (27)**	**2 (315)**	**3 (152)**	**4 (331*)**	**5 (133)**	**6 (344)**	**7 (164)**	**8 (364)**
	Набрано баллов							
0	88	96	132	55	99	118	29	137
1	18	20	2	11	30	4	23	21
2	0	0	0	0	16	8	33	0
3	0	19	0	74	0	20	30	5
4	0	7	0	26	0	0	1	0
5	60	24	32	0	21	16	50	3
Трудность задачи (в %)	38,3	27,1	19,5	40,6	20,1	19,3	52,2	6,1

2013/2014 учебный год

Прислано 135 работ

№ задачи	1 (241)	2 (327)	3 (288)	4 (177)	5 (169)	6 (35)	7 (36)	8 (69)
	Набрано баллов							
0	97	41	90	36	49	38	88	89
1	17	50	24	15	7	64	12	3
2	1	0	0	3	32	6	0	19
3	0	0	2	0	19	0	0	17
4	0	0	0	1	0	0	0	2
5	20	44	19	80	28	27	35	5
Трудность задачи (в %)	17,6	40	18,5	63	39,7	31,3	27,7	18,5

2014/2015 учебный год

Прислано 96 работ

№ задачи	1 (217)	2 (97)	3 (156)	4 (168)	5 (122)	6 (206)	7 (230)	8 (231)
	Набрано баллов							
0	39	81	25	54	49	51	68	92
1	2	0	25	18	12	12	10	3
2	28	5	10	0	1	5	0	0
3	0	0	0	3	0	6	0	1
4	0	0	0	5	0	18	0	0
5	27	10	36	16	34	4	18	0
Трудность задачи (в %)	40,2	12,5	46,9	26,5	38,3	27,5	20,8	1,25

2015/2016 учебный год

Прислано 77 работ

№ задачи	1 (—)	2 (—)	3 (—)	4 (—)	5 (—)	6 (—)	7 (—)	8 (—)
	Набрано баллов							
0	13	6	27	63	44	48	51	54
1	7	0	2	4	0	7	13	12
2	0	1	0	0	16	2	0	4
3	4	0	20	0	0	7	10	0
4	0	0	0	1	0	0	0	1
5	54	71	29	10	18	13	3	6
Трудность задачи (в %)	17,6	40	18,5	63	39,7	31,3	27,7	18,5

Школьный тур

1996 год

Сдано 118 работ

№ задачи	**1 (282б)**	**2 (—)**	**3 (225)**	**4 (—)**	**5 (—)**	**6 (—)**
	Трудность задачи (в баллах)					
Набрано баллов	4	5	6	5	5	8
0	76	94	80	101	99	79
1	2	6	17	2	16	15
2	1	4	5	4	2	11
3	0	1	3	3	0	6
4	**39**	3	0	3	0	1
5		**10**	0	**5**	**1**	1
6			**13**			0
7						0
8						**5**
Трудность задачи (в %)	33,9	13	16,1	9,5	4,2	11

1997 год

Сдано 115 работ

№ задачи	1 (—)	2 (12)	3 (—)	4 (109)	5 (250)	6 (—)
	Трудность задачи (в баллах)					
Набрано баллов	3	3	5	4	6	6
0	100	4	38	71	71	56
0,5	–	4	–	–	–	–
1	7	5	4	21	32	50
1,5	–	13	–	–	–	–
2	6	22	0	0	1	0
2,5	–	25	–	–	–	–
3	**2**	**42**	0	2	7	2
4			**66**	**21**	0	1
5			**7**		2	4
6					**2**	**2**
Трудность задачи (в %)	7,2	75,1	52,7	24,1	11,2	13,3

1998 год

Сдано 116 работ

№ задачи	1 (127)	2 (—)	3 (172)	4 (—)	5 (—)	6 (—)
	Трудность задачи (в баллах)					
Набрано баллов	4	5	6	5	7	8
0	48	53	89	46	29	68
1	26	15	16	11	79	40
2	7	3	0	5	2	3
3	5	3	0	1	3	0
4	**30**	11	1	12	0	1
5		**31**	2	**41**	0	0
6			**8**		1	2
7					**2**	0
8						**2**
Трудность задачи (в %)	37,7	39,5	11,2	47,8	13,7	8,4

1999 год

Сдано 118 работ

№ задачи	1 (149)	2 (—)	3 (—)	4 (—)	5 (258)	6 (—)
	Трудность задачи (в баллах)					
Набрано баллов	3	3	3	4	4	4
0	63	95	33	105	79	99
1	16	6	2	8	17	7
2	3	7	0	1	5	2
3	**36**	**10**	**83**	1	3	1
4				**3**	**14**	**9**
Трудность задачи (в %)	36,72	14,12	70,9	5,3	19,49	10,59

2000 год

Сдано 82 работы

№ задачи	1 (23)	2 (309)	3 (210)	4 (33а)	5 (216)	6 (227)
	Трудность задачи (в баллах)					
Набрано баллов	4	4	4	5	7	9
0	17	33	14	31	60	9
1	46	9	33	27	15	12
2	4	2	5	0	4	11
3	4	1	4	0	1	0
4	**11**	**37**	**26**	1	0	7
5				**23**	0	36
6					1	4
7					**1**	2
8						0
9						**1**
Трудность задачи (в %)	33,5	50	48,5	35,6	6,8	38,2

2001 год

Сдано 120 работ

№ задачи	1 (57)	2 (173)	3 (218)	4 (175)	5 (228)	6 (—)	7 (51)	8 (285а)
	Трудность задачи (в баллах)							
Набрано баллов	2	2	4	4	8	5	4	3
0	64	50	89	103	51	95	87	69
1	21	27	12	4	54	10	7	2
2	**35**	**43**	6	2	6	1	0	3
3			3	0	3	0	0	**46**
4			**10**	**11**	3	1	**26**	
5					0	**13**		
6					0			
7					0			
8					**3**			
Трудность задачи (в %)	39,2	47,1	15,2	10,8	11,6	13,5	23,1	40,8

2002 год

Сдано 137 работ

№ задачи	1 (244)	2 (159)	3 (209)	4 (154)	5 (282а)	6 (—)	7 (61)	8 (2)
	Трудность задачи (в баллах)							
Набрано баллов	3	5	5	5	7	6	7	5
0	95	84	91	79	131	117	101	64
1	1	16	21	14	3	14	35	0
2	4	11	5	0	0	1	0	0
3	**37**	3	2	1	0	0	0	0
4		5	2	7	0	0	0	0
5		**18**	**16**	**36**	0	0	1	**73**
6					0	**5**	0	
7					**3**		**1**	
Трудность задачи (в %)	29,7	22,9	18,2	32,8	2,5	5,6	4,9	53,3

Приложение 6

Публикации о Турнирах Архимеда

1995 год

1. Чулков П. В. Турниры Архимеда // Тематическое тестирование по математике. М., 1995.

1996 год

2. Чулков П. В. Пятый турнир Архимеда // Математика. Приложение к газете «Первое сентября», № 10, 1996.
3. Чулков П. В. Как организовать межшкольную олимпиаду по математике // Математика. Приложение к газете «Первое сентября», № 19, 1996.
4. Блинков А. Д., Чулков П. В. Задачи турниров Архимеда // Математика. Приложение к газете «Первое сентября», № 20, 1996.

1997 год

5. Чулков П. В. Шестой турнир Архимеда // Приложение «Математика» к газете «Первое сентября», № 13, 1997.
6. Чулков П. В. Шестой турнир Архимеда. — М.: ИЛКиРЛ, 1997.
7. Блинков А. Д., Чулков П. В. Турниры Архимеда. — М.: Институт логики, 1997.

8. Чулков П. В. Шестой турнир Архимеда: итоги заочного конкурса // Математика. Приложение к газете «Первое сентября», № 22, 1997.

1998 год

9. Чулков П. В. Седьмой турнир Архимеда // Математика. Приложение к газете «Первое сентября», № 18, 1998.

1999 год

10. Блинков А. Д., Кочетков К. П., Потапова М. Г., Пчелинцев Ф. А., Шапарин Е. А., Струков Т. С., Чулков П. В. (отв. за выпуск). Седьмой турнир Архимеда. — М.: ИЛКиРЛ, 1999.
11. Блинков А. Д., Баранова Т. А., Кочетков К. П., Потапова М. Г., Пчелинцев Ф. А., Шапарин Е. А., Семенов А. В., Струков Т. С., Чулков П. В. (отв. за выпуск). Восьмой турнир Архимеда. — М.: ИЛКиРЛ, 1999.
12. Чулков П. В. Восьмой турнир Архимеда // Математика. Приложение к газете «Первое сентября», № 10, 1999.
13. Струков Т. С., Чулков П. В. Восьмой турнир Архимеда: итоги заочного конкурса. // Математика. Приложение к газете «Первое сентября», № 44, 1999.

2000 год

14. Чулков П. В., Пчелинцев Ф. А., Струков Т. С. Девятый турнир Архимеда // Математика. Приложение к газете «Первое сентября», № 11, 2000.

2001 год

15. Бойцова М. А., Коробкова С. В, Пчелинцев Ф. А., Шершнев Е. Ф., Струков Т. С., Чулков П. В. Школьная олимпиада. VI–VIII класс. // Архимед. Сер. Математические соревнования. Вып. 2. — М.: АНО Институт Логики, 2001.
16. Турниры Архимеда за 10 лет. // Архимед. Сер. Математические соревнования. Вып. 3. — М.: АНО Институт Логики, 2001.
17. Шершнев Е. Ф., Струков Т. С., Пчелинцев Ф. А., Чулков П. В. Десятый турнир Архимеда. // Математика. Приложение к газете «Первое сентября», № 19, 2001.
18. Зайцева А. Н., Струков Т. С., Шершнев Е. Ф., Чулков П. В. Заочный тур Девятого и Десятого турниров Архимеда // Архимед. Сер. Математические соревнования. Вып. 5. — М.: АНО Институт Логики, 2001.
19. Струков Т. С., Чулков П. В., Шершнев Е. Ф. Девятый турнир Архимеда: итоги заочного конкурса. // Математика. Учебно-методическая газета, № 30, 2001.
20. Зайцева А. Н., Струков Т. С., Шершнев Е. Ф., Чулков П. В. Десятый турнир Архимеда: Заочный тур. // Математика. Учебно-методическая газета, № 39, 2001.

2002 год

21. Итоги Десятого Турнира Архимеда. // Архимед. Сер. Математические соревнования. Вып. 9. — М.: АНО Институт Логики, 2002.
22. Обрубов А. С., Чулков П. В., Шершнев Е. Ф. Одиннадцатый турнир Архимеда // Математика. Учебно-методическая газета, № 18, 2002.
23. Чулков П. В. Олимпиады и повседневная работа учителя математики // Математика. Учебно-методическая газета, № 21, 2002.
24. Обрубов А. С., Струков Т. С., Шершнев Е. Ф., Чулков П. В. Заочный тур Одиннадцатого турнира Архимеда. // Архимед. Сер. Математические соревнования. Вып. 11. — М.: АНО Институт Логики, 2002.
25. Зайцева А. Н., Обрубов А. С., Струков Т. С., Шершнев Е. Ф., Чулков П. В. Турнир Архимеда — 2002. Итоги заочного конкурса // Математика. Учебно-методическая газета, № 42, 2002.
26. Пчелинцев Ф. А., Зайцева А. Н., Шершнев Е. Ф., Чулков П. В. Школьный турнир Архимеда. // Архимед. Сер. Математические соревнования. Вып. 11. — М.: АНО Институт Логики, 2002.

2003 год

27. Итоги Одиннадцатого Турнира Архимеда. // Архимед. Сер. Математические соревнования. Вып. 12. — М.: АНО Институт Логики, 2003.
28. Обрубов А. С., Зайцева А. Н., Шершнев Е. Ф., Струков Т. С., Чулков П. В. Школьный Турнир

Архимеда // Архимед. Сер. Математические соревнования. Вып. 12. — М.: АНО Институт Логики, 2003.

29. Обрубов А. С., Шершнев Е. Ф., Чулков П. В. Двенадцатый турнир Архимеда // Математика. Учебно-методическая газета, № 12, 2003.
30. Простов И. В., Обрубов А. С., Зайцева А. Н., Чулков П. В. Заочный тур Двенадцатого турнира Архимеда. // Архимед. Сер. Математические соревнования. Вып. 13. — М.: АНО Институт Логики, 2003.
31. Простов И. В., Обрубов А. С., Чулков П. В. Двенадцатый турнир Архимеда. Итоги заочного конкурса // Математика. Учебно-методическая газета, № 39, 2003.

2004 год

32. Итоги Двенадцатого Турнира Архимеда. // Архимед. Сер. Математические соревнования. Вып. 14. — М.: АНО Институт Логики, 2004.
33. Чулков П. В. Турнир Архимеда в Южном Бутово // Новости образования, № 01 (53), 2004.
34. Обрубов А. С., Шершнев Е. Ф., Чулков П. В. Тринадцатый турнир Архимеда // Математика. Еженедельная учебно-методическая газета, № 19, 2004.
35. Заочный тур Тринадцатого турнира Архимеда. // Архимед. Сер. Математические соревнования. Вып. 15. — М.: АНО Институт Логики, 2004.

2005 год

36. Итоги Тринадцатого Турнира Архимеда. // Архимед. Сер. Математические соревнования. Вып. 16. — М.: АНО Институт Логики, 2005.
37. Обрубов А. С., Пчелинцев Ф. А., Струков Т. С., Шершнев Е. Ф., Чулков П. В. XIII Турнир Архимеда. Итоги заочного конкурса // Математика. Еженедельная учебно-методическая газета, № 2, 2005.
38. Обрубов А. С., Пчелинцев Ф. А., Чулков П. В., Шапарин Е. А. XIV Турнир Архимеда. 6–7 классы // Математика. Еженедельная учебно-методическая газета, № 10, 2005.
39. Чулков П. В. Тринадцать турниров Архимеда. — М.: Чистые пруды, 2005. — 31 с. — (Библиотечка «Первого сентября». Сер. «Математика». Вып. 4.)
40. Заочный тур Четырнадцатого турнира Архимеда. // Архимед. Сер. Математические соревнования. Вып. 17. — М.: АНО Институт Логики, 2005.
41. Обрубов А. С., Пчелинцев Ф. А., Чулков П. В. Итоги заочного конкурса XIV Турнира Архимеда. 6–7 классы // Математика. Еженедельная учебно-методическая газета, № 22, 2005.

2006 год

42. Итоги Четырнадцатого Турнира Архимеда. // Архимед. Сер. Математические соревнования. Вып. 18. — М.: АНО Институт Логики, 2006.
43. Обрубов А. С., Пчелинцев Ф. А., Струков Т. С., Чулков П. В. Пятнадцатый Турнир Архимеда.

Зимний тур, 6–7 классы // Математика. Еженедельная учебно-методическая газета, № 8, 2006.

44. Заочный тур Пятнадцатого турнира Архимеда // Архимед. Сер. Математические соревнования. Вып. 19. — М.: АНО Институт Логики, 2006.
45. Обрубов А. С., Пчелинцев Ф. А., Струков Т. С., Чулков П. В. Пятнадцатый Турнир Архимеда. Итоги заочного конкурса. // Математика. Еженедельная учебно-методическая газета, № 16, 2006.

2007 год

46. Итоги Пятнадцатого Турнира Архимеда. // Архимед. Сер. Математические соревнования. Вып. 20. — М.: АНО Институт Логики, 2007.
47. Обрубов А. С., Пчелинцев Ф. А., Струков Т. С., Чулков П. В. XVI Турнир Архимеда. 6–7 классы // Математика. Еженедельная учебно-методическая газета, №9, 2007.
48. Заочный тур Шестнадцатого турнира Архимеда. // Архимед. Сер. Математические соревнования. Вып. 21. — М.: АНО Институт Логики, 2007.
49. Обрубов А. С., Струков Т. С., Новодворская Е. А., Чулков П. В., Шапарин Е. А. XVI Турнир Архимеда. Итоги заочного конкурса. // Математика. Еженедельная учебно-методическая газета, № 20, 2007.

2008 год

50. Итоги Шестнадцатого Турнира Архимеда. // Архимед. Сер. Математические соревнования. Вып. 22. — М.: АНО Институт Логики, 2008.
51. Заочный тур Семнадцатого турнира Архимеда // Архимед. Сер. Математические соревнования. Вып. 23. — М.: АНО Институт Логики, 2008.
52. Новодворская Е. А., Обрубов А. С., Пчелинцев Ф. А., Струков Т. С., Чулков П. В. Семнадцатый Турнир Архимеда. // Математика. Еженедельная учебно-методическая газета, № 17, 2008.
53. Новодворская Е. А., Обрубов А. С., Пчелинцев Ф. А., Струков Т. С., Чулков П. В. Заочный Турнир Архимеда: итоги конкурса. // Математика. Еженедельная учебно-методическая газета, № 18, 2008.

2009 год

54. Итоги Семнадцатого Турнира Архимеда. // Архимед. Сер. Математические соревнования. Вып. 24. — М.: АНО Институт Логики, 2009.
55. Заочный тур Восемнадцатого турнира Архимеда // Архимед. Сер. Математические соревнования. Вып. 25. — М.: АНО Институт Логики, 2009.
56. Обрубов А. С., Пчелинцев Ф. А., Струков Т. С., Чулков П. В., Новодворская Е. А. XVIII Турнир Архимеда. Итоги заочного конкурса. // Математика. Еженедельная учебно-методическая газета, № 21, 2009.

2010 год

57. Итоги Восемнадцатого Турнира Архимеда // Архимед. Сер. Математические соревнования. Вып. 26. — М.: АНО Институт Логики, 2010.
58. Заочный тур Девятнадцатого турнира Архимеда // Архимед. Сер. Математические соревнования. Вып. 27. — М.: АНО Институт Логики, 2010.

2011 год

59. Аминев Б. Д., Новодворская Е. А., Обрубов А. С., Пчелинцев Ф. А., Струков Т. С., Чулков П. В., Шапарин Е. А. Девятнадцатый Турнир Архимеда. Итоги заочного конкурса. // Математика. Учебно-методический журнал, № 3, 2011.
60. Итоги Девятнадцатого Турнира Архимеда // Архимед. Сер. Математические соревнования. Вып. 28. — М.: АНО Институт Логики, 2011.
61. Обрубов А. С., Пчелинцев Ф. А., Струков Т. С., Чулков П. В., Шапарин Е. А. Заочный тур Двадцатого турнира Архимеда // Архимед. Сер. Математические соревнования. Вып. 29. — М.: АНО Институт Логики, 2011.
62. Аминев Б. Д., Новодворская Е. А., Обрубов А. С., Пчелинцев Ф. А., Струков Т. С., Чулков П. В., Шапарин Е. А. Двадцатый Турнир Архимеда. Итоги заочного конкурса. // Математика. Учебно-методический журнал, № 17, 2011.

2012 год

63. Обрубов А. С., Пчелинцев Ф. А., Струков Т.С., Чулков П.В., Шапарин Е.А. Итоги Двадцатого Турнира Архимеда. // Архимед. Сер. Математические соревнования. Вып. 30. — М.: АНО Институт Логики, 2012.
64. Обрубов А. С., Пчелинцев Ф. А., Струков Т. С., Чулков П. В., Шапарин Е. А. Заочный тур Двадцать первого турнира Архимеда. // Архимед. Сер. Математические соревнования. Вып. 31. — М.: АНО Институт Логики, 2012.

2013 год

65. Обрубов А. С., Пчелинцев Ф. А., Струков Т. С., Чулков П. В., Шапарин Е. А. Итоги Двадцать первого Турнира Архимеда. // Архимед. Сер. Математические соревнования. Вып. 32. — М.: АНО Институт Логики, 2013.
66. Обрубов А. С., Пчелинцев Ф. А., Струков Т. С., Чулков П. В., Шапарин Е. А. XXI Турнир Архимеда. Итоги заочного конкурса. // Математика. Методический журнал, № 3, 2013.
67. Аминев Б. Д., Обрубов А. С., Струков Т. С., Чулков П. В., Шапарин Е. А. Заочный конкурс V–VII. // Архимед. Сер. Математические соревнования. Вып. 33. — М.: АНО Институт Логики, 2013.

2014 год

68. Обрубов А. С., Струков Т. С., Чулков П. В., Шапарин Е. А. Итоги Двадцать второго Турнира Архимеда. // Архимед. Сер. Математические соревнования. Вып. 34. — М.: АНО Институт Логики, 2014.
69. Обрубов А. С., Струков Т. С., Чулков П. В., Шапарин Е. А., Потапова Е. А., Шевкин А. В. XXII Турнир Архимеда. Итоги заочного конкурса. // Математика. Методический журнал, №3, 2014.
70. Обрубов А. С., Струков Т. С., Чулков П. В., Шапарин Е. А. Заочный тур Двадцать третьего турнира Архимеда. // Архимед. Сер. Математические соревнования. Вып. 35. — М.: АНО Институт Логики, 2014.

2015 год

71. Обрубов А. С., Струков Т. С, Чулков П. В, Шапарин Е. А. Итоги Двадцать третьего Турнира Архимеда. // Архимед. Сер. Математические соревнования. Вып. 36. — М.: АНО Институт Логики, 2015.
72. Обрубов А. С., Струков Т. С., Чулков П. В., Шапарин Е. А. Заочный тур Двадцать четвёртого турнира Архимеда. // Архимед. Сер. Математические соревнования. Вып. 37. — М.: АНО Институт Логики, 2015.

2016 год

73. Обрубов А. С., Струков Т. С, Чулков П. В. Итоги Двадцать четвёртого Турнира Архимеда. // Архимед. Сер. Математические соревнования. Вып. 38. — М.: АНО Институт Логики, 2016.

74. Аминев Б. Д., Данченко О. Е., Обрубов А. С., Струков Т. С., Чулков П. В. Заочный тур Двадцать пятого турнира Архимеда. // Архимед. Сер. Математические соревнования. Вып. 39. — М.: АНО Институт Логики, 2016.

2017 год

75. Обрубов А. С., Струков Т. С, Чулков П. В, Шапарин Е. А. Итоги Двадцать пятого Турнира Архимеда. // Архимед. Сер. Математические соревнования. Вып. 40. — М.: АНО Институт Логики, 2017.

Приложение 7

Литература

При составлении заданий использована следующая литература.

1. Агаханов Н. Х. Всероссийские олимпиады школьников по математике. 1993–2009: заключительные этапы. — М.: МЦНМО, 2010.
2. Бегунц А. В., Гашков С. Б., Горяшин Д. В., Косухин О. Н., Флёров А. А. Московские математические олимпиады 1981–1992. — М.: МЦНМО, 2017.
3. Берлов С. Л., Иванов С. В., Кохась К. П. Петербургские математические олимпиады. — СПб.: Лань, 2005.
4. Бугаенко В. О. Турниры им. Ломоносова. Конкурсы по математике. — М.: МЦНМО, ЧеРо, 1998.
5. Быльцов С. Ф. Занимательная математика для всех. — СПб: Питер, 2005.
6. Быльцов С. Ф. Логические головоломки и задачи. Занимательная математика для всей семьи. СПб: Питер, 2010.
7. Вакульчик П. А. Нестандартные и олимпиадные задачи по математике. — Минск: Универсал-Пресс, 2004.
8. Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л., Раббот Ж. М. Заочные математические олимпиады. — М.: Наука, 1981.
9. Васильев Н. Б., Егоров А. А. Задачи всесоюзных математических олимпиад. — М.: Наука, 1988.

10. Вышенский В. А., Карташев Н. В., Михайловский В. И., Ядренко М. И. Сборник задач киевских математических олимпиад. — Киев: Вища школа, 1984.
11. Гальперин Г. А., Толпыго А. К. Московские математические олимпиады. — М., Просвещение, 1986.
12. Ганчев И., Чимев К., Стоянов Й. Математический фольклор. — М.: Знание, 1987.
13. Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. Ленинградские математические кружки. — Киров: Изд-во «АСА», 1994.
14. Голомб С. В. Полимино. — М.: Мир, 1975.
15. Ященко И. В. Приглашение на математический праздник. М.: МЦНМО, 2009.
16. Дынкин Е. Б., Молчанов С. А., Розенталь А. Л., Толпыго А. К. Математические задачи — М.: Наука, 1965.
17. Егоровъ В. В., Жуковъ Н. И., Карасевъ П. А., Либерманъ А. А., Потоцкiй П. И. Сборник арифметических задач. Изд-е 2-е, испр. и доп. — М.: Т-во И. Н. Кушнеревъ и Ко, 1911.
18. Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К., Васильев Н. Б. Подготовительные задачи к LVII Московской математической олимпиаде 1994 года для 8–11 классов. — М.: МГУ, 1994.
19. Козлова Е. Г. Сказки и подсказки: Задачи для математического кружка. — М.: МЦНМО, 2016.
20. Кордемский Б. А. Математическая смекалка. — М.: Оникс: Мир и Образование, 2005

21. Леман Й. Увлекательная математика. — М.: Знание, 1985.
22. Мельников О. И. Занимательные задачи по теории графов. — Минск: «ТетраСервис», 2001.
23. Морозова Е. А., Петраков И. С., Скворцов В. А. Международные математические олимпиады. — М.: Просвещение, 1976.
24. Нагибин Ф. Ф., Канин Е. С. Математическая шкатулка: пособие для учащихся 4–8 кл. — М.: Просвещение, 1984.
25. Нестеренко Ю. В., Олехник С. Н., Потапов М. К. Задачи на смекалку. — М.: Дрофа, 2005.
26. Островский А. Н. 75 задач по элементарной математике — простых, но... — М.: Просвещение, 1966.
27. Прасолов В. В., Голенищева-Кутузова Т. И., Канель-Белов А. Я., Кудряшов Ю. Г., Ященко И. В. Московские математические олимпиады 1935—1957. — М.: МЦНМО, 2010.
28. Прасолов В. В. Голенищева-Кутузова Т. И., Канель-Белов А. Я., Кудряшов Ю. Г., Трепалин А. С., Ященко И. В. Московские математические олимпиады 1958–1967. — М.: МЦНМО, 2013.
29. Произволов В. В. Задачи на вырост. — М.: МИРОС, 1995.
30. Развивающие задачи для математического досуга / Сост. Кремень Э. А., Сухотина З. С. — М.: «Школа-Пресс», 1993.
31. Савин А. П., Брук Ю. М., Волошин М. Б., Зильберман А. Р., Семенчинский С. Г., Сендеров В. А.

Физико-математические олимпиады. Сборник. — М.: Знание, 1977.

32. Смаллиан Р. М. Как же называется эта книга? — М.: АСТ, 2000.
33. Смаллиан Р. М. Алиса в Стране Смекалки. — М.: Мир, 1987.
34. Смаллиан Р. М. Принцесса или тигр? — М.: Изд. Дом Мещерякова, 2009.
35. Фомин Д. В. Санкт-Петербургские математические олимпиады. — СПб.: Политехника, 1994.
36. Фомин Д. В., Кохась К. П. Петербургские математические олимпиады. 1961–1993. — СПб: Лань, 2007.
37. Четвёртая Соросовская математическая олимпиада школьников 1997–1998. — М.: МЦНМО, 1998.
38. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра. — М.: Наука, 1977.
39. Фёдоров Р. М., Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К., Ященко И. В. Московские математические олимпиады 1993–2005. — М.: МЦНМО, 2017.
40. Фомин А. А., Кузнецова Г. М. Международные математические олимпиады. — М.: Дрофа, 1998.
41. Яковлев Г. Н., Купцов Л. П., Резниченко С. В., Гусятников П. В. Всероссийские математические олимпиады школьников. — М.: Просвещение, 1992.
42. Журналы: «Квант» (1970–2016), «Математика в школе» (1982–2016), «Наука и жизнь» (1980–2016).

Содержание

Магазин «Математическая книга»

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга» в Москве по адресу: Б. Власьевский пер., д. 11; тел. (495) 745-80-31; biblio.mccme.ru

Книга — почтой: biblio.mccme.ru/shop/order

Книги в электронном виде: www.litres.ru/mcnmo

Мы сотрудничаем с интернет-магазинами

- Книготорговая компания «Абрис»; тел. (495) 229-67-59, (812) 327-04-50; www.umlit.ru, www.textbook.ru, абрис.рф
- Интернет-магазин «Книга.ру»; тел. (495) 744-09-09; www.kniga.ru

Наши партнеры в Москве и Подмосковье

- Московский Дом Книги и его филиалы (работает интернет-магазин); тел. (495) 789-35-91; www.mdk-arbat.ru
- Магазин «Молодая Гвардия» (работает интернет-магазин): ул. Б. Полянка, д. 28; тел. (499) 238-50-01, (495) 780-33-70; www.bookmg.ru
- Магазин «Библио-Глобус» (работает интернет-магазин): ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1; тел. (495) 781-19-00; www.biblio-globus.ru
- Спорткомплекс «Олимпийский», 5-й этаж, точка 62; тел. (903) 970-34-46
- Сеть киосков «Аргумент» в МГУ; тел. (495) 939-21-76, (495) 939-22-06; www.arg.ru
- Сеть магазинов «Мир школьника» (работает интернет-магазин); тел. (495) 715-31-36, (495) 715-59-63, (499) 182-67-07, (499) 179-57-17; www.uchebnik.com
- Сеть магазинов «Шаг к пятерке»; тел. (495) 728-33-09, (495) 346-00-10; www.shkolkniga.ru
- Издательская группа URSS, Нахимовский проспект, д. 56, Выставочный зал «Науку — Всем», тел. (499) 724-25-45, www.urss.ru
- Книжный магазин издательского дома «Интеллект» в г. Долгопрудный: МФТИ (новый корпус); тел. (495) 408-73-55

Наши партнеры в Санкт-Петербурге

- Санкт-Петербургский Дом книги: Невский пр-т, д. 62; тел. (812) 314-58-88
- Магазин «Мир науки и медицины»: Литейный пр-т, д. 64; тел. (812) 273-50-12
- Магазин «Новая техническая книга»: Измайловский пр-т, д. 29; тел. (812) 251-41-10
- Информационно-книготорговый центр «Академическая литература»: Васильевский остров, Менделеевская линия, д. 5
- Киоск в здании физического факультета СПбГУ в Петергофе; тел. (812) 328-96-91, (812) 329-24-70, (812) 329-24-71
- Издательство «Петроглиф»: Фарфоровская, 18, к. 1; тел. (812) 560-05-98, (812) 943-80-76; k_i_@bk.ru
- Сеть магазинов «Учебная литература»; тел. (812) 746-82-42, тел. (812) 764-94-88, тел. (812) 235-73-88 (доб. 223)

Наши партнеры в Челябинске

- Магазин «Библио-Глобус», ул. Молдавская, д. 16, www.biblio-globus.ru

Наши партнеры в Украине

- Александр Елисаветский. Рассылка книг наложенным платежом по Украине: тел. 067-136-37-35; df-al-el@bk.ru